Teste de Hipótese

Diferença entre duas médias e diferença entre duas proporções

Caio S. R. Laytynher, Thauan N. J. Alves

14 de dezembro de 2021

Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC
Ilhéus - BA
DCET - 173: Probabilidade e estatística
2º Semestre

Possíveis hipóteses

Tipo de teste	**Médias**	**Proporções**
Bilateral	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$	$H_0 : \pi_1 = \pi_2$ $H_a : \pi_1 \neq \pi_2$
Unilateral à direita	$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ $H_a : \mu_1 > \mu_2$	$H_0 : \pi_1 \leq \pi_2$ $H_a : \pi_1 > \pi_2$
Unilateral à esquerda	$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ $H_a : \mu_1 < \mu_2$	$H_0 : \pi_1 \geq \pi_2$ $H_a : \pi_1 < \pi_2$

Tipos de teste

Tipos de teste

1. Teste t;

Tipos de teste

1. Teste t;
2. Teste t pareado;

Tipos de teste

1. Teste t;
2. Teste t pareado;
3. Teste z.

Características

Características

- Utiliza a distribuição t de Student;

Características

- Utiliza a distribuição t de Student;
- Obrigatória para pequenas amostras ($n \leq 30$).

Passos

Passos

1. Determinar H_0, H_a e o nível de significância α;

Passos

1. Determinar H_0, H_a e o nível de significância α;
2. Determinar para ambas amostras:
    2.1 Média: $\bar{x}$;
    2.2 Desvio padrão: s, ou variância: s^2;
    2.3 Quantidade de dados: n.

Passos

1. Determinar H_0, H_a e o nível de significância α;
2. Determinar para ambas amostras:
   2.1 Média: $\bar{x}$;
   2.2 Desvio padrão: s, ou variância: s^2;
   2.3 Quantidade de dados: n.
3. Verificar se as variâncias podem ser consideradas significativamente iguais a partir do **teste** F, que pode ser feito computacionalmente pela função `var.test()`.

Se forem consideradas iguais

Se forem consideradas iguais

Desvio padrão da diferença

$$s_c = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = s_c \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}$$

Se forem consideradas iguais

Desvio padrão da diferença

$$s_c = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = s_c \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}$$

Graus de liberdade

$$\phi = n_1 + n_2 - 2$$

Se não forem consideradas iguais

Se não forem consideradas iguais

Desvio padrão da diferença

$$s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Se não forem consideradas iguais

Desvio padrão da diferença

$$s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Graus de liberdade

$$\phi = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1}\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$$

Os valores de t

Os valores de t

t calculado

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_0}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Os valores de t

t calculado

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_0}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

- O valor de t crítico é o quantil da distribuição t que corresponde a uma área de α;

Os valores de t

t calculado

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_0}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

- O valor de t crítico é o quantil da distribuição t que corresponde a uma área de α;
- Ele varia para as diferetes distribuições com diferentes valores de ϕ;

Os valores de t

t calculado

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_0}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

- O valor de t crítico é o quantil da distribuição t que corresponde a uma área de α;
- Ele varia para as diferetes distribuições com diferentes valores de ϕ;
- Pode ser obtido por meio de tabelas, calculadoras científicas ou a função `qt()`;

Os valores de t

t calculado

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_0}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

- O valor de t crítico é o quantil da distribuição t que corresponde a uma área de α;
- Ele varia para as diferetes distribuições com diferentes valores de ϕ;
- Pode ser obtido por meio de tabelas, calculadoras científicas ou a função `qt()`;
- O t crítico determina a zona de rejeição, se o t_c se encontrar nessa zona, rejeita-se H_0.

Diferença entre duas médias - Teste t

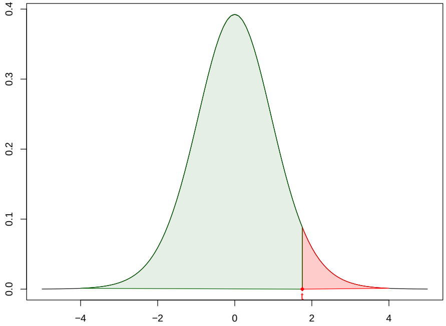

Figura 1: Exemplo de teste unilateral à direita com 95% de confiança. Distribuição t com 15 graus de liberdade.

Método do p-valor

Método do p-valor

- O p-valor é a probabilidade de ocorrência de H_0, calculado, neste caso, pela área da distribuição t a partir do valor de t_c;

Método do p-valor

- O p-valor é a probabilidade de ocorrência de H_0, calculado, neste caso, pela área da distribuição t a partir do valor de t_c;
- Se ele for menor que α, rejeita-se H_0;

Método do p-valor

- O p-valor é a probabilidade de ocorrência de H_0, calculado, neste caso, pela área da distribuição t a partir do valor de t_c;
- Se ele for menor que α, rejeita-se H_0;
- Pode ser obtido por meio de tabelas, calculadoras científicas e por meio da função `pt()`.

Diferença entre duas médias - Teste t

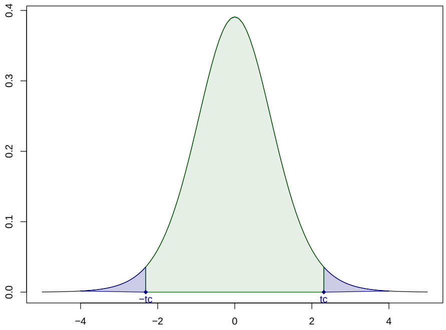

Figura 2: Exemplo de teste bilateral com 95% de confiança. Distribuição t com 12 graus de liberdade.

Método computacional - Possui acesso aos vetores das amostras

- Determinar se as variâncias são significativamente iguais utilizando `var.test()`;
- A função retorna o *p*-valor, que pode ser utilizado para rejeitar ou não rejeitar a hipótese da igualdade, H_0.

```
var.test(x,                # numeric vector
         y,                # numeric vector
         alternative,      # "two.sided", "greater"
                           # "less"
         conf.level)       # numeric
```

Método computacional - Possui acesso aos vetores das amostras

- Utiliza-se a função `t.test()`;
- O p-valor que a função retorna pode ser utilizado como critério para rejeitar ou não H_0.

```
t.test(x,              # numeric vector
       y,              # numeric vector
       alternative,    # "two.sided", "greater",
                       # "less"
       conf.level,     # numeric
       mu,             # numeric
       var.equal)      # boolean
```

Método computacional - Não possui acesso aos vetores das amostras

- O teste F para igualdade entre variâncias deve ser feito previamente, recomenda-se a utilização das funções `qf()` e `pf()`;
- As contas devem ser feitas previamente para determinar t_c e ϕ;
- A partir dos valores de α e ϕ, calcula-se o t crítico utilizando a função `qt()`;
- Verifica se t_c se encontra na região de rejeição de H_0.

```
qt(p,              # numeric
   df,             # numeric
   lower.tail)     # boolean
```

Método computacional - Não possui acesso aos vetores das amostras

- Alternativamente, utiliza-se a função `pt()` para calcular o p-valor e utilizá-lo para rejeitar ou não H_0.

```
pt(q,           # numeric
   df,          # numeric
   lower.tail)  # boolean
```

Características

Características

- Utilizado para amostras relacionadas entre si;

Características

- Utilizado para amostras relacionadas entre si;
- Geralmente a amostra é a mesma medida em momentos diferentes;

Características

- Utilizado para amostras relacionadas entre si;
- Geralmente a amostra é a mesma medida em momentos diferentes;
- O tamanho das amostras é o mesmo;

Características

- Utilizado para amostras relacionadas entre si;
- Geralmente a amostra é a mesma medida em momentos diferentes;
- O tamanho das amostras é o mesmo;
- Utiliza distribuição t de Student.

Passos

Passos

1. Determinar H_0, H_a e α;

Passos

1. Determinar H_0, H_a e α;
2. Tirar a diferença entre cada dado de ambas as amostras;

Passos

1. Determinar H_0, H_a e α;
2. Tirar a diferença entre cada dado de ambas as amostras;
3. Calcular a média das diferenças;

Passos

1. Determinar H_0, H_a e α;
2. Tirar a diferença entre cada dado de ambas as amostras;
3. Calcular a média das diferenças;
4. Calcular o desvio padrão das diferenças;

Passos

1. Determinar H_0, H_a e α;
2. Tirar a diferença entre cada dado de ambas as amostras;
3. Calcular a média das diferenças;
4. Calcular o desvio padrão das diferenças;
5. Calcular t_c e os graus de liberdade;

Passos

1. Determinar H_0, H_a e α;
2. Tirar a diferença entre cada dado de ambas as amostras;
3. Calcular a média das diferenças;
4. Calcular o desvio padrão das diferenças;
5. Calcular t_c e os graus de liberdade;
6. Realizar o mesmo procedimento do teste t padrão.

Diferença entre duas médias - Teste t pareado

Média das diferenças

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=0}^{n} d_i}{n}$$

Diferença entre duas médias - Teste t pareado

Média das diferenças

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=0}^{n} d_i}{n}$$

Desvio padrão das diferenças

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$$

Diferença entre duas médias - Teste t pareado

Média das diferenças

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=0}^{n} d_i}{n}$$

Desvio padrão das diferenças

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$$

t calculado

$$t_c = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

Diferença entre duas médias - Teste t pareado

Graus de liberdade

$$\phi = n - 1$$

Método computacional - Possui acesso aos vetores das amostras

- A função `t.test()` possui um parâmetro chamado `paired`, que pode ser alterado para `TRUE` para indicar a realização de um teste pareado.

```
t.test(x, y, alternative="greater", paired=TRUE)
```

Diferença entre duas médias - Teste t pareado

Método computacional - Não possui acesso aos vetores das amostras

- Os cálculos devem ser feitos previamente para determinar os valores de t_c e ϕ;
- A partir daí, pode-se recorrer ao valor de t crítico pela função `qt()` ou ao método do p-valor pela função $pt()$.

```
alpha = 0.05
t_c = 2.23
phi = 15

qt(alpha, phi, lower.tail=F)
    # [1] 1.75305
pt(t_c, phi, lower.tail=F)
    # [1] 0.02072412
```

Características

Características

- Utiliza a distribuição normal;

Características

- Utiliza a distribuição normal;
- Assume variância conhecida;

Características

- Utiliza a distribuição normal;
- Assume variância conhecida;
- Teoricamente, pode ser utilizado para amostras consideradas grandes ($n > 30$);

Características

- Utiliza a distribuição normal;
- Assume variância conhecida;
- Teoricamente, pode ser utilizado para amostras consideradas grandes ($n > 30$);
- Não é implementado nativamente no R, apenas com pacotes de livros.

Passos

Passos

1. Determinar H_0, H_a e α;

Passos

1. Determinar H_0, H_a e α;
2. Determinar para ambas amostras:
   2.1 Média: $\bar{x}$;
   2.2 Desvio padrão: σ, ou variância σ^2;
   2.3 Quantidade de dados: n.

Passos

1. Determinar H_0, H_a e α;
2. Determinar para ambas amostras:
   2.1 Média: $\bar{x}$;
   2.2 Desvio padrão: σ, ou variância σ^2;
   2.3 Quantidade de dados: n.
3. Calcular desvio padrão combinado;

Passos

1. Determinar H_0, H_a e α;
2. Determinar para ambas amostras:
    2.1 Média: $\bar{x}$;
    2.2 Desvio padrão: σ, ou variância σ^2;
    2.3 Quantidade de dados: n.
3. Calcular desvio padrão combinado;
4. Determinar o valor de z_c;

Passos

1. Determinar H_0, H_a e α;
2. Determinar para ambas amostras:
    2.1 Média: $\bar{x}$;
    2.2 Desvio padrão: σ, ou variância σ^2;
    2.3 Quantidade de dados: n.
3. Calcular desvio padrão combinado;
4. Determinar o valor de z_c;
5. Achar o valor de z crítico ou determinar o seu p-valor.

Diferença entre duas médias - Teste z

Desvio padrão combinado

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Diferença entre duas médias - Teste z

Desvio padrão combinado

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

z calculado

$$z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Diferença entre duas médias - Teste z

Desvio padrão combinado

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

z calculado

$$z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}}$$

- O valor de z crítico é o quantil da distribuição normal que corresponde a probabilidade (área) equivalente ao nível de significância α. Pode ser obtido pela função `qnorm()`;

Diferença entre duas médias - Teste z

Desvio padrão combinado

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

z calculado

$$z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}}$$

- O valor de z crítico é o quantil da distribuição normal que corresponde a probabilidade (área) equivalente ao nível de significância α. Pode ser obtido pela função `qnorm()`;
- O p-valor nesse caso é calculado a partir da distribuição normal e do valor de z_c. Pode ser obtido pela função `pnorm()`.

Diferença entre duas médias - Teste z

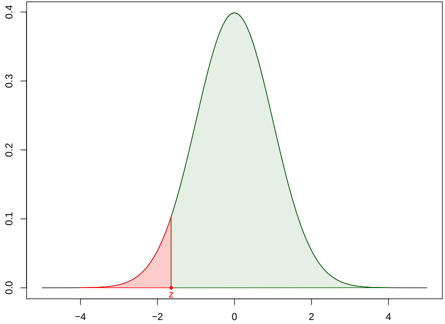

Figura 3: Exemplo de teste unilateral à esquerda com 95% de confiança. Distribuição normal padrão.

Diferença entre duas médias - Teste z

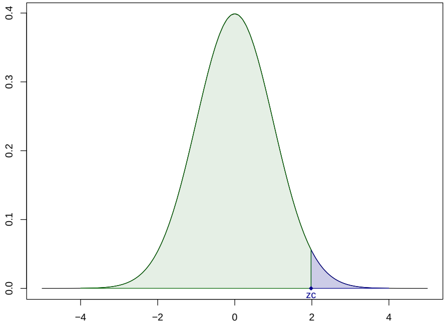

Figura 4: Exemplo de teste unilateral à direita com 95% de confiança. Distribuição normal padrão.

Método computacional

- É necessário realizar as contas previamente para determinar o valor de z_c;
- O z crítico é dado pela função `qnorm()`, que funciona da mesma maneira que a `qt()`, porém para a distribuição normal;
- Para calcular o p-valor, utiliza-se a função `pnorm()`, a equivalente da `pt()` para a distribuição normal.

```
alpha = 0.05
z_c = 1.97

qnorm(alpha, lower.tail=F)
     # [1] 1.644854
pnorm(z_c, lower.tail=F)
     # [1] 0.02441919
```

Diferença entre duas médias - Exemplo 1

A empresa ACME desenvolveu uma nova bateria. O engenheiro no comando afirma que a nova bateria opera continuamente por pelo menos 7 minutos a mais que a bateria antiga.

Para testar a afirmação, a empresa seleciona uma amostra aleatória simples de 100 baterias novas e 100 velhas. As baterias velhas rodam continuamente por 190 minutos com um desvio padrão de 20 minutos; as baterias novas, 200 minutos com um desvio padrão de 40 minutos.

Verifique a afirmação do engenheiro com um nível de significância de 5% ($\alpha = 0{,}05$).

Diferença entre duas médias - Exemplo 1

Hipóteses

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 7$$

$$H_a : \mu_1 - \mu_2 > 7$$

Dados:

- $s_1 = 40$
- $s_2 = 20$
- $\bar{x}_1 = 200$
- $\bar{x}_2 = 190$
- $n_1 = 100$
- $n_2 = 100$
- $\mu_0 = 7$

Diferença entre duas médias - Exemplo 1

Teste F

$$F_c = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{40^2}{20^2} = 4$$

$$p\text{-valor} = 0$$

$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ para variâncias diferentes

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{40^2}{100} + \frac{20^2}{100}} = 4{,}47$$

t_c

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_0}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{(200 - 190) - 7}{4{,}47} = 0{,}67$$

Diferença entre duas médias - Exemplo 1

ϕ para variâncias diferentes

$$\phi = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1}\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$$

$$\Longrightarrow \phi = \frac{\left(\frac{40^2}{100} + \frac{20^2}{100}\right)^2}{\frac{1}{100-1}\left(\frac{40^2}{100}\right)^2 + \frac{1}{100-1}\left(\frac{20^2}{100}\right)^2} = 145{,}59$$

- p-valor $= 0{,}25$
- Como o p-valor $> \alpha$, aceita-se H_0.

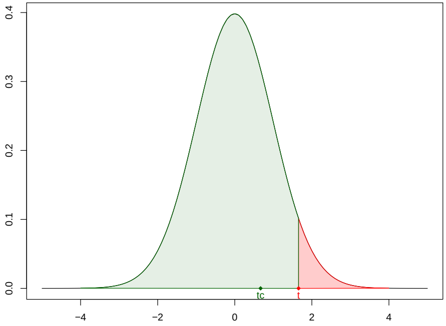

Figura 5: Teste unilateral à direita com 95% de confiança. Distribuição t com 145,59 graus de liberdade.

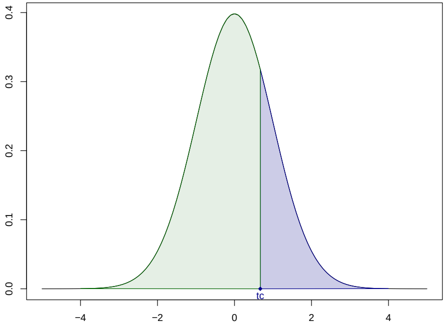

Figura 6: Teste unilateral à direita com 95% de confiança. Distribuição t com 145,59 graus de liberdade.

Passos

Passos

1. Determinar H_0, H_a e α;

Passos

1. Determinar H_0, H_a e α;
2. Calcular ambas proporções;

Diferença entre duas proporções - Teste z

Se $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = 0$

Se $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = 0$

Desvio padrão da diferença

$$p_{1,2} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

$$\sigma_{p_1 - p_2} = \sqrt{p_{1,2}(1 - p_{1,2})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

Caso contrário

Caso contrário

Desvio padrão da diferença

$$\sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

Os valores de z

Os valores de z

z calculado

$$z_c = \frac{(p_1 - p_2) - \pi_0}{\sigma_{p_1 - p_2}}$$

Os valores de z

z calculado

$$z_c = \frac{(p_1 - p_2) - \pi_0}{\sigma_{p_1 - p_2}}$$

- O valor de z crítico e o p-valor são determinados da mesma maneira que anteriormente.

Método computacional

- O R possui a função `prop.test()`;
- São fornecidos a frequência de elementos pertencentes a cada grupo analisado bem como o tamanho total de ambas amostras;
- Para os propósitos deste curso, `correct` será sempre definido como `FALSE`.

```
prop.test(x,              # numeric vector
          n,              # numeric vector
          alternative,    # "two.sided", "less"
                          # "greater"
          conf.level,     # numeric
          correct=FALSE)
```

Método computacional

- Os valores são passados na forma de vetor;
- A função retorna entre diversas informações o p-valor, que pode ser utilizado para rejeitar ou não H_0.

```r
freq_vec = c(13, 17)
n_vec = c(20, 23)

prop.test(x=freq_vec,
          n=n_vec,
          alternative="greater"
          correct=FALSE)
```

Suponha que a empresa ACME DRUG COMPANY desenvolva um novo medicamento contra resfriado. A empresa afirma que o medicamento é igualmente efetivo para homens e mulheres. Para testar essa afirmação, eles escolheram uma amostra aleatória simples de 100 mulheres e 200 homens de uma população de 100.000 voluntários.

Ao final do estudo, 38% das mulheres pegaram resfriado e 51% dos homens pegaram resfriado. Baseado nestes resultados, podemos rejeitar a afirmação da empresa do medicamento ser igualmente efetivo para homens e mulheres? Use um nível de significância de 5%.

Hipóteses

$$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = 0$$

$$H_a : \pi_1 - \pi_2 \neq 0$$

Dados:

- $p_1 = 0{,}38$
- $p_2 = 0{,}51$
- $n_1 = 100$
- $n_2 = 200$
- $\pi_0 = 0$
- $\alpha = 0{,}05$

Diferença entre duas proporções - Exemplo 2

$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ para $\pi_0 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} = \frac{100 \cdot 0{,}38 + 200 \cdot 0{,}51}{100 + 200} = 0{,}47$$

$$\sigma_{p_1 - p_2} = \sqrt{p_{1,2}(1 - p_{1,2}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

$$\implies \sigma_{p_1 - p_2} = \sqrt{0{,}47(1 - 0{,}47) \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200} \right)} = 0{,}061$$

z_c

$$z_c = \frac{(p_1 - p_2) - \pi_0}{\sigma_{p_1 - p_2}} = \frac{(0{,}38 - 0{,}51) - 0}{0{,}061} = -2{,}13$$

Diferença entre duas proporções - Exemplo 2

- p-valor $= 0{,}033$
- Como p-valor $< \alpha$, rejeita-se H_0.

Diferença entre duas proporções - Exemplo 2

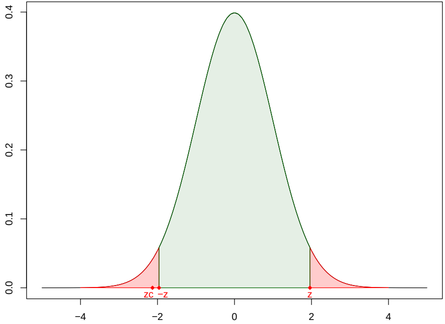

Figura 7: Teste bilateral com 95% de confiança. Distribuição normal padrão.

Diferença entre duas proporções - Exemplo 2

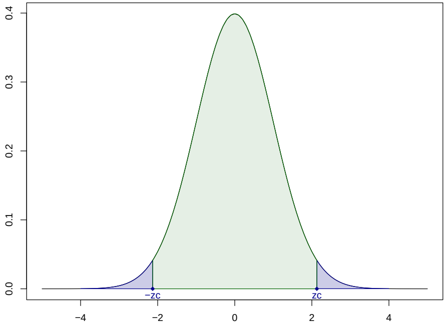

Figura 8: Teste bilateral com 95% de confiança. Distribuição normal padrão.

Obrigado pela atenção!