



Introdução ao Estudo da Probabilidade

Aluno: Welvis Souza

Ano: 2020

Trimestre Especial

Conceito

A palavra **probabilidade** deriva do Latim *probare* (provar ou testar). Informalmente, provável é uma das muitas palavras utilizadas para eventos incertos ou desconhecidos , sendo também substituída por algumas palavras como “sorte”, “risco”, “azar”, "chance", “incerteza”, “duvidoso”, dependendo do contexto.

Importância

A teoria da probabilidade é essencial aos procedimentos utilizados na estatística inferencial.

Segundo alguns autores, a teoria da probabilidade originou-se como modelo explicativo para os jogos de azar: dados, moedas, etc.

Probabilidade na Estatística

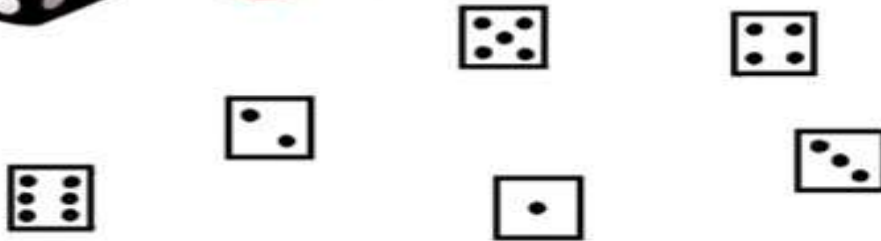
Os fenômenos estudados pela estatística são fenômenos que mesmo em condições normais de experimentação variam de uma observação para outra, dificultando a previsão de um resultado futuro. Para a explicação desses fenômenos adota-se o cálculo matemático probabilístico.

Experimento Aleatório



Experimento
Aleatório

Jogue um dado... Qual
número sairá?



Experimento Aleatório

Veja a tabela abaixo:



Experimento	Resultado experimental
Jogar uma moeda	cara, coroa
Retirar uma carta de um baralho	copa, ouro, paus, espada
Jogar um dado	1, 2, 3, 4, 5, 6
Selecionar uma peça para inspeção	defeituosa, não defeituosa

Experimento Aleatório

A análise desses experimentos revela que:

- a. Cada experimento poderá ser repetido indefinidamente sob as mesmas condições.
- b. Não se conhece “a priori” um particular resultado do experimento.
- c. Quando o experimento for repetido um grande número de vezes surgirá uma regularidade, isto é, haverá uma estabilidade da fração:



Experimento Aleatório

$$f_i = n/N$$

onde:

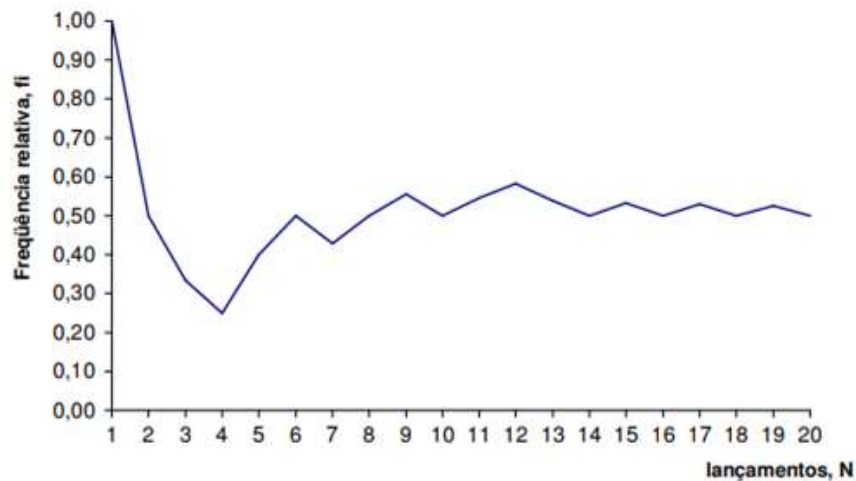
f_i : frequência relativa

n : número de sucessos de um particular resultado

N : número de repetições



Exemplo:



c/k	lan	suc/lan = n/N	fi
c	1	1/1	1,00
k	2	1/2	0,50
k	3	1/3	0,33
k	4	1/4	0,25
c	5	2/5	0,40
c	6	3/6	0,50
k	7	3/7	0,43
c	8	4/8	0,50
c	9	5/9	0,56
k	10	5/10	0,50
c	11	6/11	0,55
c	12	7/12	0,58
k	13	7/13	0,54
k	14	7/14	0,50
c	15	8/15	0,53
k	16	8/16	0,50
c	17	9/17	0,53
k	18	9/18	0,50
c	19	10/19	0,53
k	20	10/20	0,50

Experimento Determinístico

É aquele que quando realizado sob determinadas condições é possível prever o resultado particular que irá ocorrer.

Exemplo:

- Água aquecida a 100°C , sob pressão normal, entra em ebulição.
- Se tomarmos um determinado sólido, sabemos que a uma certa temperatura haverá a passagem para o estado líquido.



Espaço Amostral

Para cada experimento aleatório '**E**' define-se espaço amostral '**S**' o conjunto de todos os possíveis resultados desse experimento.

Exemplo:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

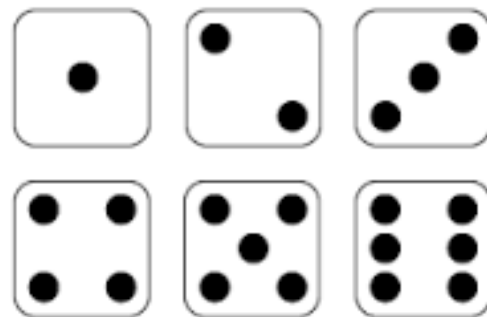


Figura 1- Faces de um dado

Evento

É um conjunto particular de resultados do espaço amostral do experimento, em termos de conjuntos, é um subconjunto de S .

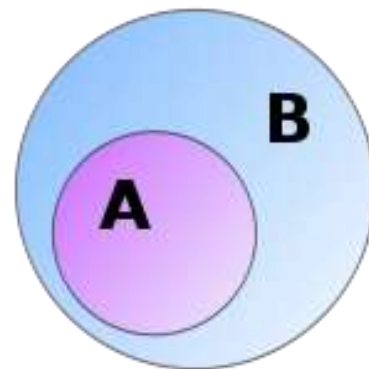


Figura 2- Evento A em B

Evento

Exemplo:

- Seja $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ o espaço amostral.
Veamos agora os seguintes eventos:
- A : Um número par e primo, $A = \{2\}$ (evento simples ou elementar)
- B: Um número maior que 6, $B = \emptyset$ (evento impossível)
- C: Um número menor que 7, $C = \{1,2,3,4,5,6\}$ (evento certo) $C= S$

Evento

Usando as operações com conjuntos, podem-se formar novos conjuntos, assim:

- $A \cup B$: é o evento que ocorre se A ocorre, ou B ocorre, ou ambos ocorrem:

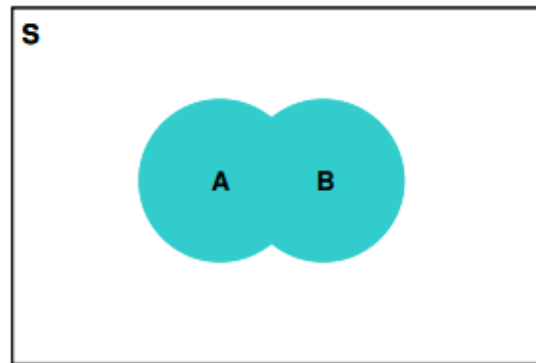


Figura 3 - União conjuntos

Exemplo:

- No lançamento de um dado

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A: Números divisíveis por 2: $A=\{2, 4, 6\}$

B: Números maiores que quatro: $B=\{5,6\}$

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$

Evento

Usando as operações com conjuntos, podem-se formar novos conjuntos, assim:

- $A \cap B$: é o evento que ocorre se A e B ocorrem simultaneamente:

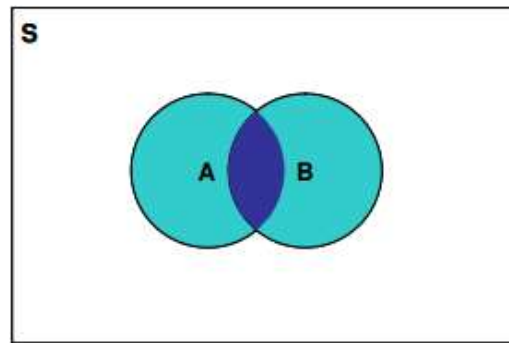


Figura 4 - Interseção conjuntos

Exemplo:

- No lançamento de um dado

A: Um número menor ou igual 4. $A = \{ 1,2,3,4 \}$

B: um número maior ou igual a 4. $B = \{ 4,5,6 \}$

$(A \cap B) = \{ 4 \}$

Evento

Usando as operações com conjuntos, podem-se formar novos conjuntos, assim:

- \bar{A} : é o evento que ocorre se A não ocorre:

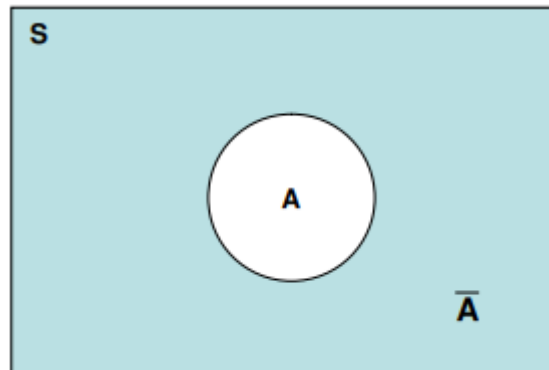


Figura 5 - Evento não ocorre

Evento

Sendo S o espaço amostral finito, verifica-se que p^n fornece o número total de eventos extraídos de S :

$$S = p^n$$

Onde:

p = valores possíveis (moeda = 2; dado = 6)

n = número de elementos do evento

Exemplo:

Seja o experimento E jogar três moedas e observar os resultados:

$S = \{(ccc), (cck), (ckc), (kcc), (kkk), (kkc), (kck), (ckk)\}$

$p=2$

$n=3$

$$S = p^n = 2^3 = 8$$



Eventos Mutuamente Exclusivos

Dizemos que dois ou mais eventos são mutuamente exclusivos quando a realização de um exclui a realização dos outro.

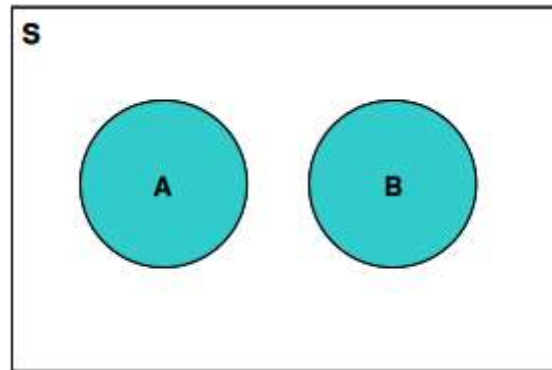


Figura 6 - Mutuamente Exclusivos

Exemplo:

Considere o experimento:

- jogar um dado e observar o resultado.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Sejam os eventos:

A = ocorrer número par e B = ocorrer números ímpar.

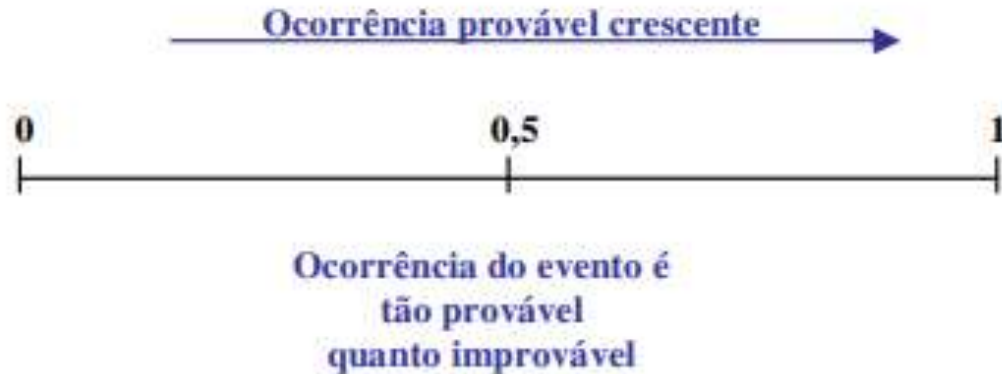
Logo: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$.

A e B são considerados mutuamente exclusivos

pois $A \cap B = \emptyset$

Conceito e Definição de Probabilidade

Conceito: a probabilidade é uma medida numérica da provável ocorrência de um evento.



Conceito e Definição de Probabilidade

Definição: dado um experimento aleatório E , e S seu espaço amostral, a probabilidade de um evento A , indicada por $P(A)$, é uma função definida em S que associa a cada evento um número real, satisfazendo os seguintes axiomas:

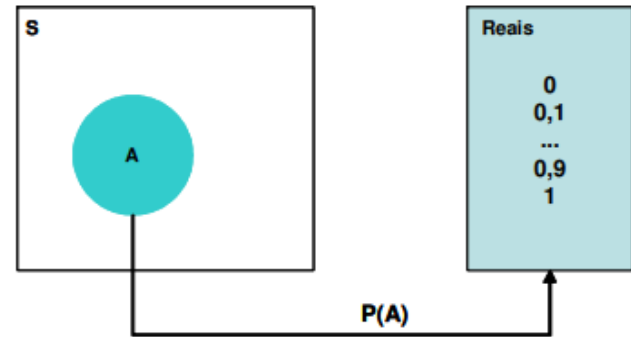


Figura 7 - Probabilidade de um evento A

Conceito e Definição de Probabilidade

Axiomas:

- $P(S) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- Se A e B forem eventos mutuamente exclusivos, $A \cap B = \phi$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

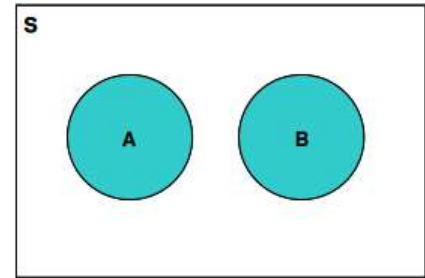


Figura 6 - Mutuamente Exclusivos

Principais Teoremas da Probabilidade

- Teorema 1:

Se ϕ é um conjunto vazio, então: $P(\phi) = 0$

Exemplo:

A probabilidade de ocorrer face 2 e 3 no lançamento de um dado não viciado é $P(\phi) = 0$, enquanto que a probabilidade de ocorrer face 2 ou 3 é $1/6 + 1/6 = 1/3$.

Principais Teoremas da Probabilidade

- Teorema 2:

Se A^c é o evento complementar do evento A , então $P(A^c) = 1 - P(A)$

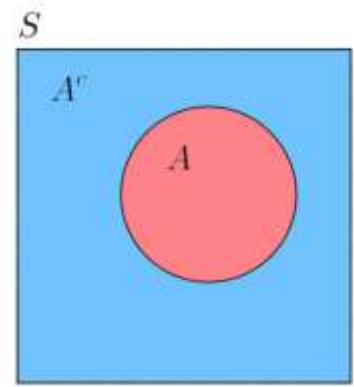


Figura 7 – Evento Complementar

Principais Teoremas da Probabilidade

- Exemplo:

Uma urna contém 4 bolas verdes, 3 bolas brancas e 8 bolas amarelas.

Uma bola é retirada aleatoriamente. Determinar a probabilidade de que a bola retirada não ser amarela.

Resolução:

$V = \text{"a bola retirada é verde"} \quad P(V) = 4/15 = 26,67\%$

$B = \text{"a bola retirada é branca"} \quad P(B) = 3/15 = 20,00\%$

$A = \text{"a bola retirada é amarela"} \quad P(A) = 8/15 = 53,33\%$

Principais Teoremas da Probabilidade

- Exemplo:

Uma urna contém 4 bolas verdes, 3 bolas brancas e 8 bolas amarelas.

Uma bola é retirada aleatoriamente. Determinar a probabilidade de que a bola retirada não ser amarela.

A^c = A bola retirada não é amarela.

$$P(A^c) = 1 - P(A) \longrightarrow = 1 - 8/15 \longrightarrow = 7/15 \text{ ou } 46,67\%$$

Principais Teoremas da Probabilidade

- Teorema 3:

Se ($A \subset B$), então: $P(A) \leq P(B)$

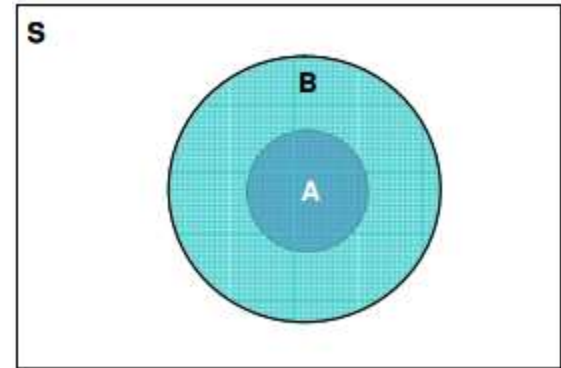


Figura 8 - A está contido em B

Principais Teoremas da Probabilidade

- Teorema 4: Teorema do Produto

Se dois eventos são independentes, a probabilidade de que eles ocorram juntos é igual ao produto de suas probabilidades.

Exemplo:

Jogar uma moeda e, em seguida, um dado. Qual a probabilidade de sair cara E par?

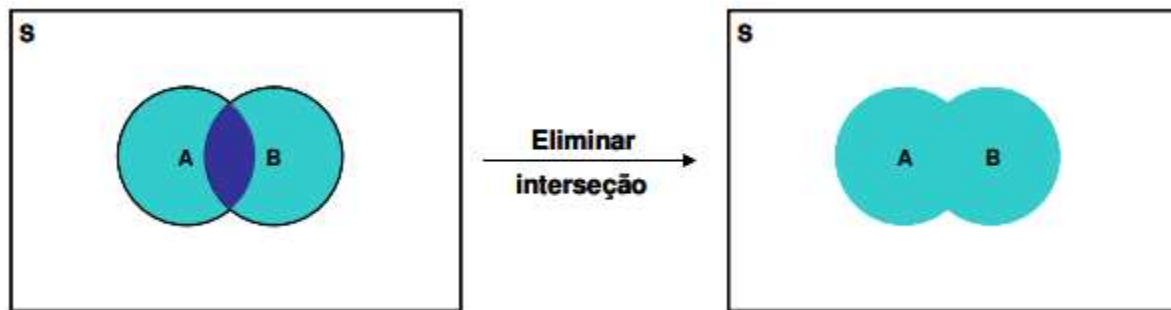
$$\begin{aligned} P(\text{cara} \cap \text{par}) &= P(\text{cara}) \times P(\text{par}) \\ &= 0,5 \times 0,5 = 0,25 \end{aligned}$$

Principais Teoremas da Probabilidade

- Teorema 5: Teorema da Soma

1º) Se A e B são dois eventos quaisquer, ou seja, podem ser mutuamente excludentes ou não, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Exemplo

Considere o experimento “jogar uma moeda e, em seguida, um dado”

Considere os eventos:

$E1 = \{\text{cara}\}$ e $E2 = \{\text{resultado par}\}$

Qual a probabilidade de sair cara ou par?

$P(E1 \cup E2) = P(E1) + P(E2) - P(E1 \text{ e } E2)$ ou:

$$P(\text{cara} \cup \text{par}) = P(\text{cara}) + P(\text{par}) - P(\text{cara} \cap \text{par}) = 0,5 + 0,5 - 0,25 = 0,75$$

Probabilidades finitas dos espaços amostrais finitos

Seja um espaço amostral finito $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

A cada evento elementar a_i associa-se um número p_i denominado probabilidade de a_i , $P(a_i)$ ou simplesmente P_i , satisfazendo as seguintes condições:

$$p_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n) \text{ e } p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Exemplo:

Três cavalos (A, B e C) estão em uma corrida; A tem duas vezes mais probabilidade de ganhar que B;

e B tem duas vezes mais probabilidade de ganhar que C.

Quais são as probabilidades de vitória de cada um, isto é, $P(A)$, $P(B)$ e $P(C)$?

Exemplo:

- Fazendo $P(C) = p$

$$P(B) = 2p$$

$$P(A) = 4p$$

$$p + 2p + 4p = 1 \quad \therefore \quad p = \frac{1}{7}$$

$$P(A) = \frac{4}{7}$$

$$P(B) = \frac{2}{7}$$

$$P(C) = \frac{1}{7}$$

$$\text{Probabilidade de B ou C ganhar: } P(B \cup C) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

Espaços Amostrais Finitos Equiprováveis

Quando se associa a cada ponto amostral a mesma probabilidade, o espaço amostral chama-se equiprovável ou uniforme.

Se S contém N pontos, então, a probabilidade de cada ponto será:

$$1/N$$

Se A contém n pontos:

$$P(A) = n \cdot \left(\frac{1}{N} \right) = \frac{n}{N}$$

Espaços Amostrais Finitos Equiprováveis

Este método de avaliar $P(A)$ é frequentemente enunciado da seguinte maneira:

$$P(A) = \frac{\text{número de vezes que o evento (A) pode ocorrer}}{\text{número de vezes que o espaço amostral (S) ocorre}}$$

ou:

$$P(A) = \frac{NCF \text{ (número de casos favoráveis)}}{NTC \text{ (número total de casos)}}$$

Exemplo:

Escolher aleatoriamente (a expressão “aleatória” indica que o espaço amostral é equiprovável) uma carta de um baralho com 52 cartas.

$A = \{\text{a carta é de ouros}\}$

$B = \{\text{a carta é uma figura}\}$

Calcular $P(A)$ e $P(B)$

$$P(A) = \frac{\text{número de ouros}}{\text{número de cartas}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{\text{número de figuras}}{\text{número de cartas}} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

Espaços Amostrais Finitos Equiprováveis

A análise combinatória (teoria da contagem) tem fundamental importância para se contar o número de casos favoráveis e o total de casos.

A combinação de N elementos tomados (combinados) n a n, sendo n combinado a N, é calculada por:

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Exemplo:

Num lote de 12 peças, 4 são defeituosas, duas peças são retiradas aleatoriamente uma após a outra sem reposição. Calcule:

$P(A)$ = a probabilidade de ambas serem defeituosas:



Exemplo:

Num lote de 12 peças, 4 são defeituosas, duas peças são retiradas aleatoriamente uma após a outra sem reposição. Calcule:

$P(A)$ = a probabilidade de ambas serem defeituosas:

$$A = C_2^4 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

$$S = C_2^{12} = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2!(12-2)!} = 66$$

$$P(A) = \frac{NCF \text{ (número de casos favoráveis)}}{NTC \text{ (número total de casos)}} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

Exemplo:

$P(B)$ = a probabilidade de ambas não serem defeituosas:

$$B = C_2^8 = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$$

$$P(B) = \frac{NCF \text{ (número de casos favoráveis)}}{NTC \text{ (número total de casos)}} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$$

A probabilidade de pelo menos uma ser defeituosa (C):

Observar que C é o complemento de B, ou seja $C = \bar{B}$

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$$

Probabilidade Condicional

Na matemática, a probabilidade condicionada refere-se à probabilidade de um evento A sabendo que ocorreu um outro evento B e representa-se por:

$$P(A/B)$$

Probabilidade Condicional

$$P(A/B)$$

É de grande importância para o cálculo das probabilidades calcular a probabilidade condicional.

Ou seja, avaliar a probabilidade do evento A condicionada ao evento B, simbolizada por $P(A/B)$.

Lê-se probabilidade do evento A condicionada à ocorrência do evento B, ou ainda, probabilidade de A dado B.

Probabilidade Condicional

$$P(A/B)$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \text{ com } P(B) \neq 0, \text{ pois } B \text{ já ocorreu}$$

- Fórmula mais prática para aplicação:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{NCF(A \cap B)}{NTC}}{\frac{NCF(B)}{NTC}} = \frac{NCF(A \cap B)}{NCF(B)}$$

Exemplo:

Dois dados são lançados. Consideremos os eventos:

- $A = \{(x_1, x_2) / x_1 + x_2 = 10\}$
- $B = \{(x_1, x_2) / x_1 > x_2\}$

(Onde x_1 é o resultado do dado 1 e x_2 é o resultado do dado 2)

Tarefa: Avaliar $P(A)$; $P(B)$; $P(A/B)$ e $P(B/A)$.

Exemplo:

Dois dados são lançados. Consideremos os eventos:

$$S = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

Exemplo:

Dois dados são lançados. Consideremos os eventos:

$$A = [x_1, x_2 / x_1 + x_2 = 10] = [(4,6);(6,4);(5,5)]$$

$$B = [(x_1, x_2) / x_1 > x_2] = \left\{ \begin{array}{l} (2,1); \\ (3,1); (3,2); \\ (4,1); (4,2); (4,3); \\ (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); \\ (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5) \end{array} \right\}$$

Exemplo:

Dois dados são lançados. Consideremos os eventos:

$$P(A) = \frac{NCF(A)}{NTC} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(A/B) = \frac{NCF(A \cap B)}{NCF(B)} = \frac{1}{15}$$

$$P(B) = \frac{NCF(B)}{NTC} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Obs : notar que apenas o par (6,4) é favorável ao evento $(A \cap B)$

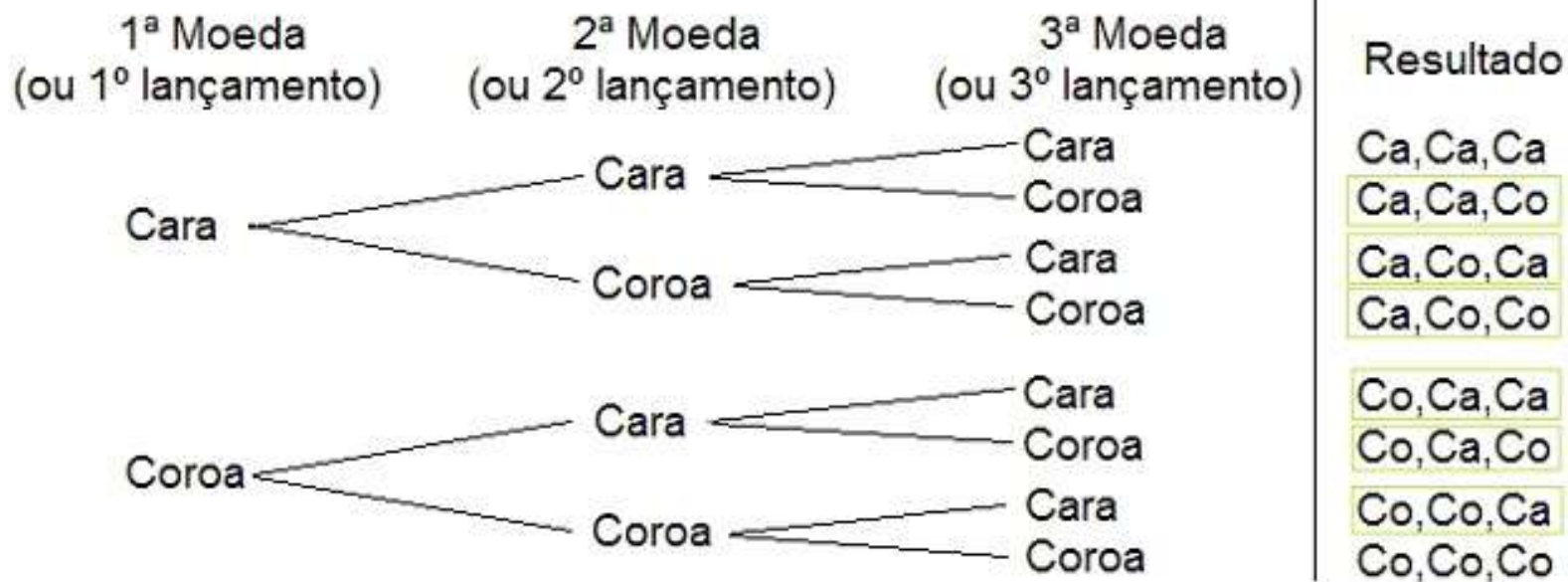
$$P(B/A) = \frac{NCF(A \cap B)}{NCF(A)} = \frac{1}{3}$$

Diagrama de Árvore (árvore de probabilidades)

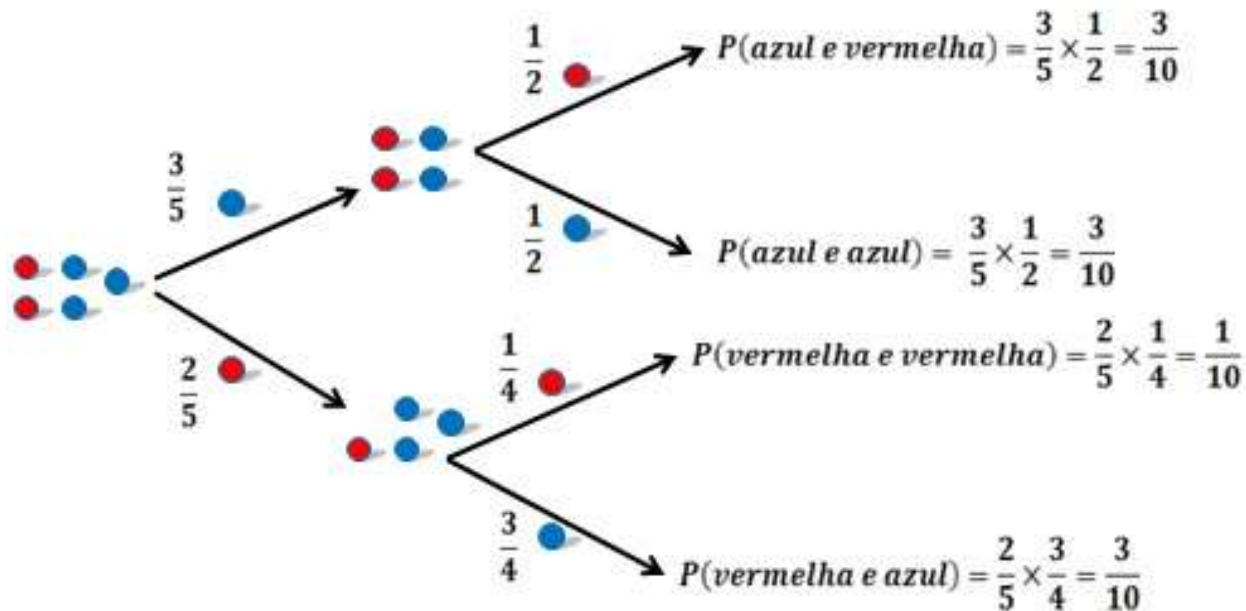
Pode ser usado para representar as várias possibilidades de uma permutação ou combinação (neste caso, é mais adequado chamá-lo de árvore de possibilidades).

Esse tipo de diagrama provê uma maneira conveniente de organizar as informações de um conjunto de eventos condicionais.

Exemplo:



Exemplo:



Teorema do Produto

A partir da definição de probabilidade condicional pode-se enunciar o teorema do produto:

“A probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos, A e B , do mesmo espaço amostral, é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicional do outro, dado o primeiro.”

Teorema do Produto

Assim:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Exemplo:

Num lote de 12 peças, 4 são defeituosas. 2 peças são retiradas uma após a outra sem reposição. Qual a probabilidade de ambas não serem defeituosas?

- $A = \{\text{a primeira peça é boa}\}$
- $B = \{\text{a segunda peça é boa}\}$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{56}{132} = \frac{14}{33}$$

Exemplo:

Num lote de 12 peças, 4 são defeituosas. 2 peças são retiradas uma após a outra sem reposição. Qual a probabilidade de ambas não serem defeituosas?

- $A = \{\text{a primeira peça é boa}\}$
- $B = \{\text{a segunda peça é boa}\}$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A) \quad \text{Logo: } P(B) = P(B/A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{56}{132} = \frac{14}{33}$$

Independência Estatística

Um evento A é dito independente de um evento B, se a probabilidade de A ocorrer não é influenciada pelo fato de B ter ocorrido ou não.

Em outras palavras, se a probabilidade de A é igual à probabilidade condicional de A dado B, isto é, se:

$$P(A) = P(A / B) \text{ assim como } P(B) = P(B / A)$$

Independência Estatística

Considerando o teorema do produto, pode-se afirmar que se A e B são independentes, então:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

A equação acima é usada como definição formal de independência.

Exemplo 1:

Num lote de 10 peças, 4 são defeituosas. 2 peças são retiradas uma após a outra com reposição. Qual a probabilidade de que ambas sejam boas?

- $A = \{\text{a primeira peça é boa}\}$
- $B = \{\text{a segunda peça é boa}\}$

Notar que A e B são independentes, pois $P(B) = P(B / A)$

Exemplo 1:

Num lote de 10 peças, 4 são defeituosas. 2 peças são retiradas uma após a outra com reposição. Qual a probabilidade de que ambas sejam boas?

- $A = \{\text{a primeira peça é boa}\}$
- $B = \{\text{a segunda peça é boa}\}$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{25}$$

Curiosidades

Probabilidade de ser canonizado: 1 em 20 milhões

Probabilidade de virar um astronauta: 1 em 13,2 milhões

Probabilidade de ganhar uma medalha olímpica: 1 em 662 mil

Probabilidade de se machucar com fogos de artifício: 1 em 19.556

Probabilidade de se machucar fazendo a barba: 1 em 6.585

Probabilidade de se machucar usando uma serra elétrica: 1 em 4.464

Probabilidade de se machucar cortando a grama: 1 em 3.623

Probabilidade de ser atingido por um raio: 1 em 576.000

Probabilidade de morrer atingido por um raio: 1 em 2.320.000

Probabilidade de ter um filho gênio: 1 em 250

Probabilidade de ganhar um Oscar: 1 em 11.500

Probabilidade de ser atingido por uma peça de avião caindo: 1 em 10 milhões

Probabilidade de contrair Creutzfeldt-Jakob (Vaca Louca): 1 em 40 milhões

Curiosidades

Conclusão:

1. Contrair a vaca louca é 2x mais "difícil" que virar santo, e é 4x mais improvável que ser atingido por uma peça de avião.
2. É mais provável que você seja atingido por um raio a conseguir um prêmio máximo da Lotofácil.

Referências

- Notas de aula expandidas - Prof José Claudio Faria.
- Probabilidade Condicionada - https://pt.wikipedia.org/wiki/Probabilidade_condicionada. Acesso em 2017.
- Diagrama de Árvore - https://pt.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_%C3%A1rvore. Acesso em 2017.
- Curiosidades Probabilísticas - <http://loto-facil.forum-livre.com/t1764-curiosidades-probabilisticas>. Acesso em 2018.



Introdução ao Estudo da Probabilidade

Aluno: Welvis Souza

Ano: 2020

Trimestre Especial