Médias, variância e desvio padrão no intervalo de confiança

UESC – UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
CET173 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA - ENGENHARIA ELÉTRICA
16 DE DEZEMBRO DE 2021
FELIPE FRANÇA BANDEIRA - 201910931
JOÃO GABRIEL SOUZA DIAS - 201911403
MAIRE SABRINA OLIVEIRA SANTOS - 201911636

Intervalo De confiança:

O intervalo de confiança (IC) é um intervalo de valores que inclui um valor populacional com um certo grau de confiança, fornece uma faixa de valores que capturará o valor real da população em uma determinada quantidade de amostras.

- Usam a variabilidade de seus dados para avaliar a precisão ou exatidão de suas estatísticas estimadas.

- Podem ser usados para descrever um único grupo ou para comparar dois grupos.

- Tamanho de amostra maior/menor variabilidade = intervalo de confiança com uma margem de erro menor.
- Um tamanho de amostra menor/ maior variabilidade = intervalo de confiança com uma margem de erro maior .
- O nível de confiança também afeta a largura do intervalo.

Fórmula do intervalo de confiança:

$$\bar{X} \pm Z\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} \pm \ t\frac{s}{\sqrt{n}}$$

- $\bar{X}$ é a média;
- **Z** é o valor Z escolhido (1,96 para 95%);
- **s** é o erro padrão;
- **n** é o tamanho da amostra;
- **t** é o valor crítico escolhido.

Porque os pesquisadores usam o intervalo de confiança?

- Os pesquisadores usam intervalos de confiança para medir a incerteza em uma variável de amostra.

- Calculam um intervalo de confiança para cada amostra para ver como ela pode representar o verdadeiro valor da variável populacional.

- O nível de confiança se refere à porcentagem de probabilidade, ou certeza, de que o intervalo de confiança conteria o verdadeiro parâmetro da população quando você desenha uma amostra aleatória muitas vezes.

Principais níveis de confiança utilizados:

Nível de confiança	Z-Score
0,90	1,645
0,95	1,96
0,99	2,58

Média no intervalo de confiança

- Um intervalo de confiança para a média é uma forma de estimar a verdadeira média da população. Em vez de um único número para a média, um intervalo de confiança fornece uma estimativa inferior e uma estimativa superior.

- Por exemplo, em vez de “6” como a média, você pode obter {5,7}, onde 5 é a estimativa mais baixa e 7 é a mais alta. Quanto mais estreita for a estimativa, mais precisa ela será.

Intervalo de confiança para média

Para se fazer inferências estatísticas sobre uma população, geralmente, são utilizadas as distribuições Normal Padrão e a t. Um método de escolha é:

Inicio → n>30

n>30 — Não → Pop. tem dist. Normal ?

n>30 — Sim → Pelo teorema central do limite, podemos utilizar a dist. Normal (usar s se σ for desconhecido).

Pop. tem dist. Normal ? — Sim → σ é conhecido ?

Pop. tem dist. Normal ? — Não → Não é possível utilizar a dist. normal nem a t.

σ é conhecido ? — Não → Utilize a dist. t

σ é conhecido ? — Sim → Utilize dist. normal

Média no intervalo de confiança: com variância conhecida

Condições:

1. A amostra é aleatória simples.
2. O desvio padrão populacional é conhecido como σ.
3. Pelo menos uma das condições seguintes é satisfeita: a distribuição é aproximadamente normal ou $n>30$.

IC Média com variância conhecida

- Para populações infinitas, a variável normal padrão de μ será denominada $Z_{observado}$:

$$Zobs = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Da distribuição normal $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

- Para populações finitas, deve-se acrescentar o fator de correção populacional ao cálculo de $Z_{observado}$:

$$Zobs = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

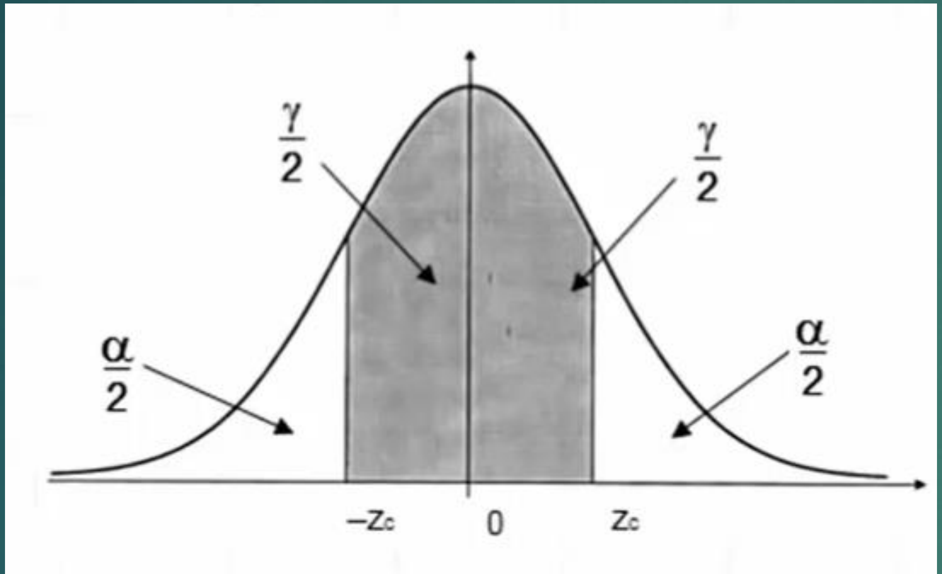
- O fator correção deve ser usado sempre que tivermos :

$$\frac{n}{N} > 0{,}05$$

Caso o resultado não seja maior que 5%, usa a fórmula sem acrescentar o fator de correção.

IC Média com variância conhecida

Utilizar a tabela norma padrão para determinar os valores críticos da variável Z:



O Zc é o valor crítico obtido a partir da tabela da normal, que é calculado pelo valor γ (Gama), que é o nível de confiança. $\gamma = \propto - 1$.

O $\propto$ é o nível de significância

O intervalo de confiança para a média populacional é tal que :

$$P(\bar{X} - Zc.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Zc.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \gamma$$

$$IC = \bar{X} \pm Zc.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Caso se utilize o fator de correção, temos :

$$IC = \bar{X} \pm Zc.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Exemplo 1: IC média com variância conhecida

- A duração da vida de uma peça de equipamento é tal que o desvio padrão populacional é e 5 horas. Foram amostradas aleatoriamente 100 dessas peças, obtendo-se média de 500 horas. Desejamos construir um intervalo de confiança para a verdadeira duração média da peça com um nível de 95% de confiança. Suponha que tenhamos uma população de 1000 peças.

Temos:
$\sigma = 5$
n = 100
$\bar{X}$= 500
γ = 95%
N = 1000

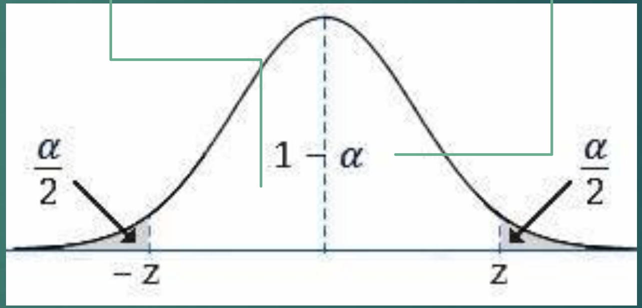
$\frac{n}{N} > 0,05$, então $\frac{100}{1000} = 0,10 > 0,05$

Portanto ok, podemos utilizar a fórmula com o fator de correção populacional.

$$IC = \bar{X} \pm Zc.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

0,475

0,475



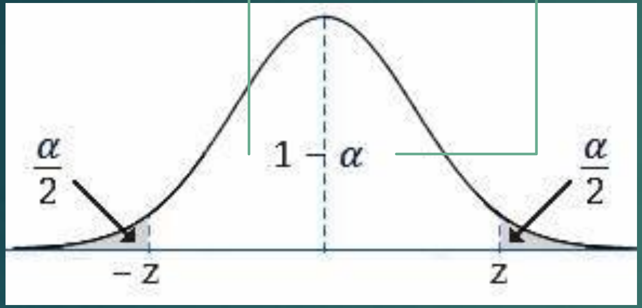
Procurar o Valor na tabela da normal.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	**0,4495**	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	**0,4750**	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817

Exemplo 1: IC média com variância conhecida

0,475

0,475



Temos:
σ = 5
n = 100
$\bar{X}$= 500
γ = 95%
N = 1000

Zc =1,96 e o –Zc= -1,96

$$IC = 500 \pm 1{,}96.\frac{5}{\sqrt{100}}\sqrt{\frac{1000-100}{1000-1}}$$

$$IC = 500 \pm 0{,}93$$

500 - 0,93 = 499,07

500 + 0,93 = 500,93

$$P(499{,}07 \leq \mu \leq 500{,}93) = 0{,}95$$

OU

IC[499,07 ; 500,93]

Média no intervalo de confiança: com variância desconhecida

- Quando temos pequenas amostras e não conhecemos o valor do desvio padrão populacional , construímos intervalos de confiança para a média populacional utilizando a distribuição t de Student para encontrar os valores críticos (tc) com (n-1) graus de liberdade.

- Os graus de liberdade ou g.l. ajudam a obter os valores críticos.

Média no intervalo de confiança: com variância desconhecida

- A t de Student tem as seguintes características :

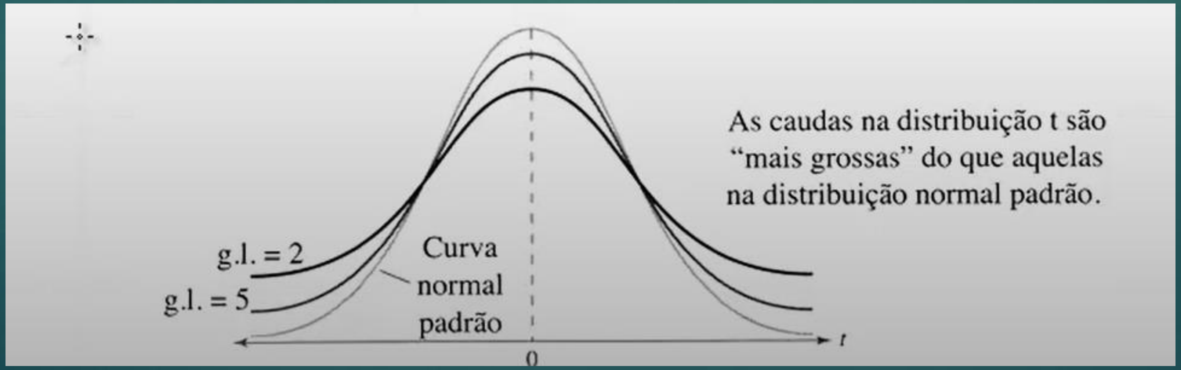
1)Tem a forma de sino e é simétrica em relação a média.

2)A distribuição t é uma família de curvas, cada uma determinada por um parâmetro chamado de grau de liberdade(g.l.=n-1).

3)A área total sob a curva é 1% ou 100%.

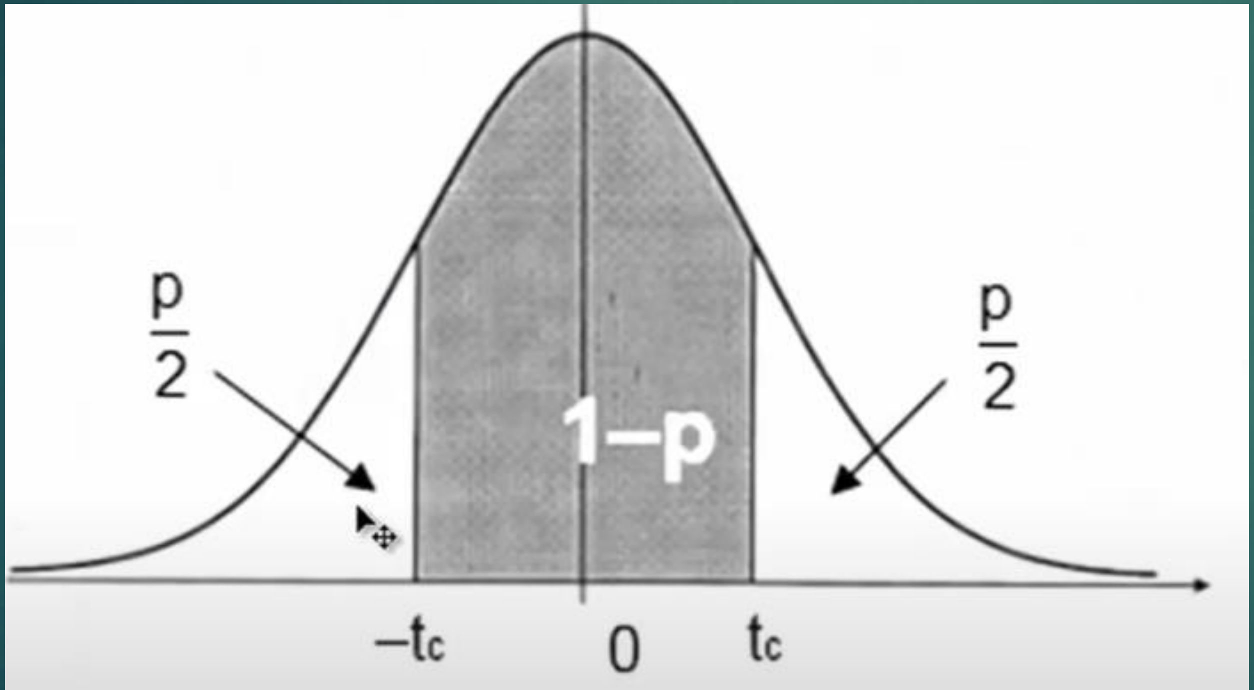
4)A média, a moda e a mediana da distribuição t são iguais a 0.

5) Conforme os graus de liberdade aumentam, a distribuição t se aproxima da distribuição normal. Para mais de 30 g.l. , a distribuição t se aproxima da normal, que podemos usar a tabela da norma padrão.



Média no intervalo de confiança: com variância desconhecida

- Tabela de t de Student possui as seguintes características:



A soma das duas caudas da curva é igual ao valor de p. Ou seja o nível de significância corresponde ao valor 1- p.

Média no intervalo de confiança: com variância desconhecida

- Notamos que agora trabalhamos com o desvio padrão amostral s, visto que o populacional é desconhecido:

- Populações infinitas :

$$IC = \bar{X} \pm tc.\frac{s}{\sqrt{n}}$$

- Populações finitas:

$$IC = \bar{X} \pm tc.\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Exemplo 2: IC média com variância desconhecida

- A amostra em raw: {6, 6, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 11, 12} foi extraída de uma população normal. Construa um intervalo de confiança para a média ao nível de 95%.

Temos:
γ = 95%

Achar a média amostral:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma\, fi.X}{n} =$$

$$= \frac{2.6+1.7+1.8+3.9+1.10+1.11+1.12}{10} = \frac{87}{10} = 8{,}7$$

Xi	fi
6	2
7	1
8	1
9	3
10	1
11	1
12	1

Total: n=10

Achar a variância amostral:

$$s^2 = \frac{\Sigma\, fi(Xi-\bar{X})^2}{n-1} =$$

$$= \frac{2(6-8{,}7)^2+1(7-8{,}7)^2+1(8-8{,}7)^2+3(9-8{,}7)^2+1(10-8{,}7)^2+1(11-8{,}7)^2+1(12-8{,}7)^2}{10-1} = 4{,}01$$

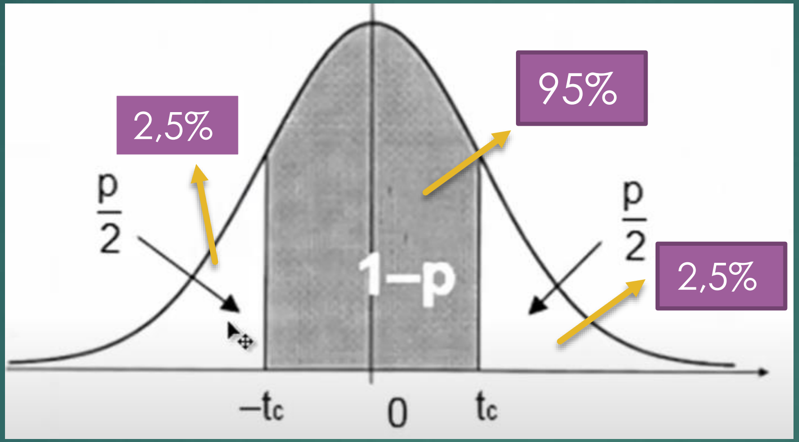
Desvio Padrão Amostral:

$$s = \sqrt{s^2} = 2{,}002$$

<u>Exemplo 2</u>: IC média com variância desconhecida

$$IC = \bar{X} \pm tc.\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Temos:
γ = 95%



p = 5%
g.l.= n-1 = 10-1 = 9

Em seguida ,procurar os valores na tabela de t de Student...

Distribuição t de Student

gl/q	Área contida nas duas caudas laterais (bicaudal) da distribuição t de Student											
	0,990	0,980	0,975	0,950	0,900	0,800	0,200	0,100	0,050	0,025	0,020	0,010
	Área contida na cauda superior ou inferior (unicaudal) da distribuição t de Student											
	0,995	0,990	0,9875	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,0125	0,010	0,005
1	0,016	0,031	0,039	0,079	0,158	0,325	3,078	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657
2	0,014	0,028	0,035	0,071	0,142	0,289	1,886	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925
3	0,014	0,027	0,034	0,068	0,137	0,277	1,638	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841
4	0,013	0,027	0,033	0,067	0,134	0,271	1,533	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604
5	0,013	0,026	0,033	0,066	0,132	0,267	1,476	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032
6	0,013	0,026	0,033	0,065	0,131	0,265	1,440	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707
7	0,013	0,026	0,032	0,065	0,130	0,263	1,415	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499
8	0,013	0,026	0,032	0,065	0,130	0,262	1,397	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355
9	0,013	0,026	0,032	0,064	0,129	0,261	1,383	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250
10	0,013	0,026	0,032	0,064	0,129	0,260	1,372	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169
11	0,013	0,026	0,032	0,064	0,129	0,260	1,363	1,796	2,201	2,593	2,718	3,106
12	0,013	0,026	0,032	0,064	0,128	0,259	1,356	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055
13	0,013	0,026	0,032	0,064	0,128	0,259	1,350	1,771	2,160	2,533	2,650	3,012
14	0,013	0,026	0,032	0,064	0,128	0,258	1,345	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977
15	0,013	0,025	0,032	0,064	0,128	0,258	1,341	1,753	2,131	2,490	2,602	2,947
16	0,013	0,025	0,032	0,064	0,128	0,258	1,337	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921
17	0,013	0,025	0,032	0,064	0,128	0,257	1,333	1,740	2,110	2,458	2,567	2,898
18	0,013	0,025	0,032	0,064	0,127	0,257	1,330	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878
19	0,013	0,025	0,032	0,064	0,127	0,257	1,328	1,729	2,093	2,433	2,539	2,861
20	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,257	1,325	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845
21	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,257	1,323	1,721	2,080	2,414	2,518	2,831
22	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,256	1,321	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819
23	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,256	1,319	1,714	2,069	2,398	2,500	2,807
24	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,256	1,318	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797
25	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,256	1,316	1,708	2,060	2,385	2,485	2,787
26	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,256	1,315	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779
27	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,256	1,314	1,703	2,052	2,373	2,473	2,771
28	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,256	1,313	1,701	2,048	2,368	2,467	2,763
29	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,256	1,311	1,699	2,045	2,364	2,462	2,756
30	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,256	1,310	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750
31	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,256	1,309	1,696	2,040	2,356	2,453	2,744
32	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,255	1,309	1,694	2,037	2,352	2,449	2,738
33	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,255	1,308	1,692	2,035	2,348	2,445	2,733
34	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,255	1,307	1,691	2,032	2,345	2,441	2,728
35	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,255	1,306	1,690	2,030	2,342	2,438	2,724
36	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,255	1,306	1,688	2,028	2,339	2,434	2,719
37	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,255	1,305	1,687	2,026	2,336	2,431	2,715
38	0,013	0,025	0,032	0,063	0,127	0,255	1,304	1,686	2,024	2,334	2,429	2,712
39	0,013	0,025	0,032	0,063	0,126	0,255	1,304	1,685	2,023	2,331	2,426	2,708
40	0,013	0,025	0,032	0,063	0,126	0,255	1,303	1,684	2,021	2,329	2,423	2,704
50	0,013	0,025	0,031	0,063	0,126	0,255	1,299	1,676	2,009	2,311	2,403	2,678
60	0,013	0,025	0,031	0,063	0,126	0,254	1,296	1,671	2,000	2,299	2,390	2,660
70	0,013	0,025	0,031	0,063	0,126	0,254	1,294	1,667	1,994	2,291	2,381	2,648
80	0,013	0,025	0,031	0,063	0,126	0,254	1,292	1,664	1,990	2,284	2,374	2,639
90	0,013	0,025	0,031	0,063	0,126	0,254	1,291	1,662	1,987	2,280	2,368	2,632
100	0,013	0,025	0,031	0,063	0,126	0,254	1,290	1,660	1,984	2,276	2,364	2,626
120	0,013	0,025	0,031	0,063	0,126	0,254	1,289	1,658	1,980	2,270	2,358	2,617
####	0,013	0,025	0,031	0,063	0,126	0,253	1,282	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576

graus de liberdade

Exemplo 2: IC média com variância desconhecida

- *portanto temos : tc =2,262 e o –tc= -2,262*

$$IC = \bar{X} \pm tc.\frac{s}{\sqrt{n}} = 8{,}7 \pm 2{,}262.\frac{2{,}00}{\sqrt{10}} = 8{,}7 \pm 1{,}43$$

8,7-1,43 = 7,27

8,7+1,43 = 10,13

➢ Portanto IC=[7,27 ; 10,13]

O que é Variância?

Variância é uma medida de dispersão que mostra o quão distante cada valor desse conjunto está do valor médio.

- Menor variância: valores mais próximos da média.
- Maior variância: valores mais distantes da média.

Cálculo da variância: populacional

- Para calcular a variância populacional basta utilizar a fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

σ^2: variância
X_i: valor analisado
$\bar{X}$: média aritmética do conjunto
n: número de dados do conjunto

Cálculo de variância: amostral

- Deve ser utilizado quando o conjunto de dados é muito grande e queremos apenas uma amostra aleatória.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}$$

s^2: variância amostral
X_i: valor analisado
$\bar{X}$: média aritmética do conjunto
n: número de dados do conjunto

Variância no intervalo de confiança

- É importante em casos de controle de qualidade.
- Utiliza da distribuição qui-quadrada (geralmente escrito como χ^2).
- Pela definição:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

χ^2: qui – quadrado.
(n-1): grau de liberdade.
s^2 : variância amostral.
σ^2 : variância populacional.

Variável aleatória qui-quadrada

A função de densidade de probabilidade de uma qui-quadrada é definida por:

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} \mathrm{e}^{-x} dx$$

Resolvendo essa integral e considerando r um número inteiro obtemos:

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} \mathrm{e}^{-x/2} \qquad x > 0.$$

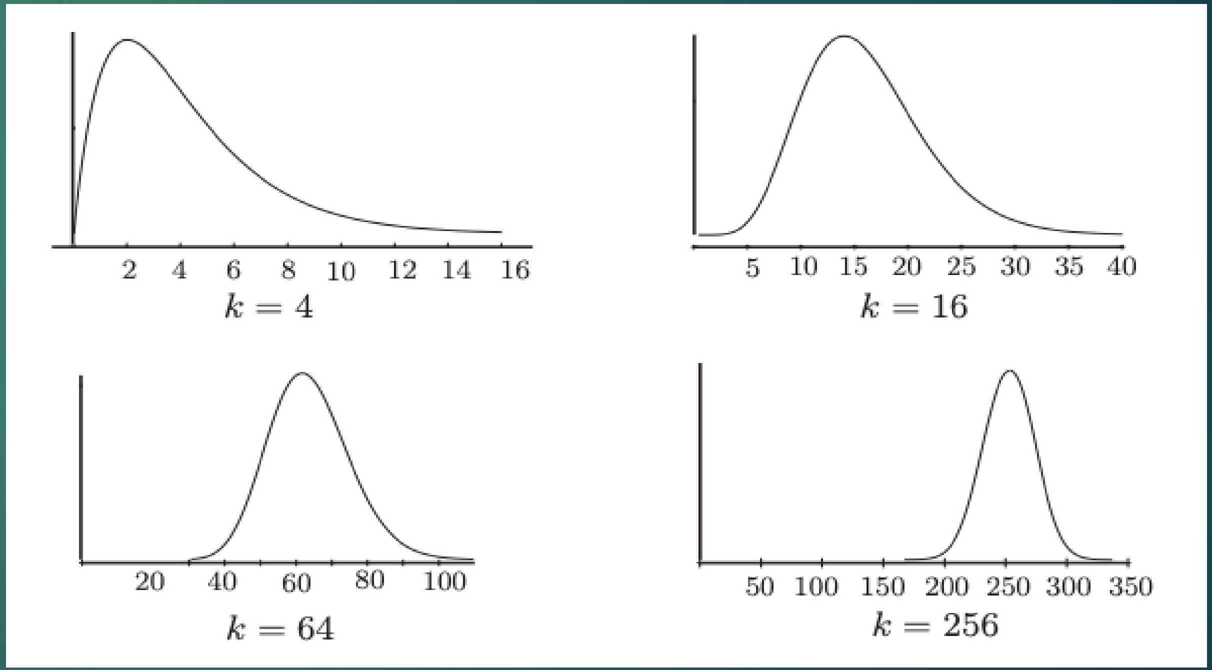
Variável aleatória qui-quadrada

- Função de densidade de probabilidade para vários valores convenientes de k.

k = graus de liberdade

A variância da qui-quadrada
é 2k.

Existe a tabela para facilitar
o cálculo.



Graus de liberdade

- Número de comparações independentes que podem ser feitas entre os elementos de uma amostra.
- Também pode ser pensado como o número de variáveis independentes envolvidas menos o número de restrições impostas.
- É dado por (n-1).

Distribuição Qui-Quadrado - Unicaudal à Direita

Graus de Liberdade

p ►	99,5%	99%	97,5%	95%	90%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
31	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003
32	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328
33	15,815	17,074	19,047	20,867	23,110	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648

Construindo um intervalo de confiança para a variância

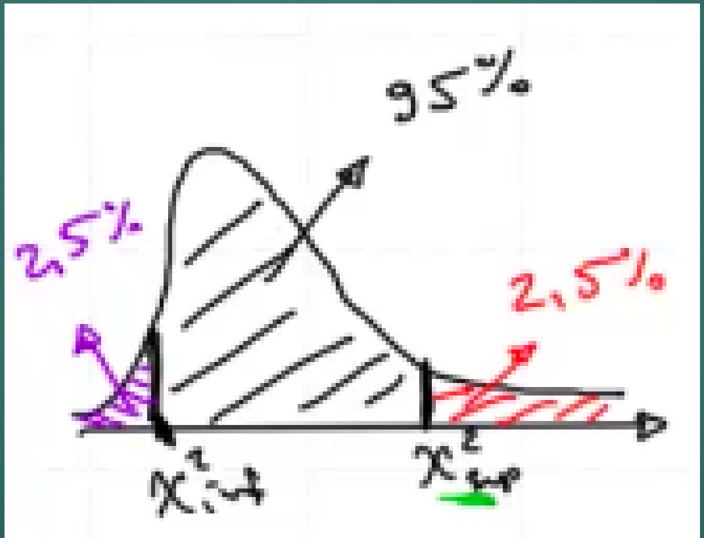
Se x1, x2, x3, · · ·, xn é uma amostra aleatória retirada de uma população normal com média μ e variância σ^2 e se a variação da amostra é denotada por s^2 , a variável aleatória:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

qui-quadrada com n − 1 graus de liberdade nos permite construir um intervalo de confiança.

Construindo um intervalo de confiança para a variância

- Primeiro: decidir um nível de confiança: 95%, por exemplo.



Construindo um intervalo de confiança para a variância

Para desenvolver o intervalo de confiança, sabemos que:

$$\chi^2_{\text{sup}} \leq X^2 \leq \chi^2_{\text{inf}} \quad \Rightarrow \quad \chi^2_{\text{sup}} \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\text{inf}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\chi^2_{\text{sup}}} \leq \frac{\sigma^2}{(n-1)s^2} \leq \frac{1}{\chi^2_{\text{inf}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\text{sup}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\text{inf}}}$$

Fórmula do intervalo de confiança

$$IC(\sigma^2;\gamma) = [\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{sup}};\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{inf}}]$$

Aplicações

É tomada uma amostra aleatória de 20 rolamentos de esferas de aço medidos nominalmente e os diâmetros são medidos com precisão. As medidas, em mm, são as seguintes:

2.02 1.94 2.09 1.95 1.98 2.00 2.03 2.04 2.08 2.07

1.99 1.96 1.99 1.95 1.99 1.99 2.03 2.05 2.01 2.03

Assumindo que os diâmetros são normalmente distribuídos com média desconhecida, μ, e variância desconhecida σ^2. Encontre um intervalo de confiança bilateral de 95% para a variância, σ^2.

Aplicações

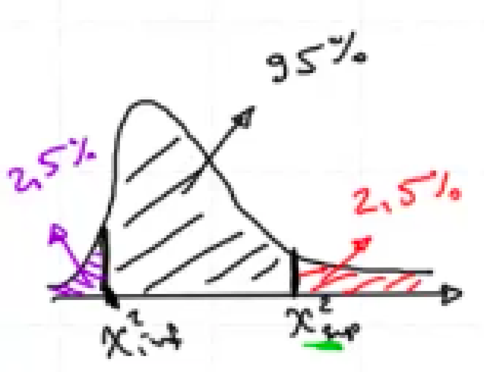
- Solução: Ao utilizarmos a fórmula :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

- Encontramos s^2= 0,001795. Próximo passo é achar o valor do grau de liberdade.

- Como temos n = 20 e (n-1) , então (n-1) = 19.

- Como é pedido um nível de confiança de 95%:



Distribuição Qui-Quadrado - Unicaudal à Direita

Graus de Liberdade p ▶	99,5%	99%	97,5%	95%	90%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
31	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003
32	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328
33	15,815	17,074	19,047	20,867	23,110	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648

Aplicação

- O grau de confiança é 19, pela tabela obtemos χ^2_{inf} = 8,907 e χ^2_{sup} = 32,852 .
- O intervalo de confiança de σ^2 é $\frac{0,034105}{32,852} < \sigma^2 < \frac{0,034105}{8,907} = 1,0382.10^{-3}mm < \sigma^2 < 3,8291.10^{-3}$mm.

O que é desvio padrão ?

- É uma medida que expressa o grau de dispersão de um conjunto de dados. Indica o quanto um conjunto de dados é homogêneo.

- Quanto mais próximo de 0 for o desvio padrão, mais homogêneo são os dados. Logo o desvio padrão tem relevância direta em como você interpreta os dados de forma segura e mais próxima da realidade.

- O desvio padrão é uma medida utilizada para contornar o inconveniente de unidade de medida apresentada pela variância.

- A unidade de medida do desvio padrão é igual a unidade de medida mensurada na variável.

- Sejam x1, x2,···, xn observações provenientes de uma amostra, o desvio padrão é dado por:

$$s = \sqrt{s^2}$$

- Se as observações forem provenientes de uma população, então

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Para uma observação provenientes de uma população

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1-}M_A)^2}{n}}$$

Para uma observação provenientes de uma amostra

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1-}M_A)^2}{n-1}}$$

∑: símbolo de somatório. Indica que temos que somar todos os termos, desde a primeira posição (i=1) até a posição n.
x_i: valor na posição **i** no conjunto de dados.
M_A: média aritmética dos dados.
n: quantidade de dados.

Desvio Padrão no intervalo de confiança

Desvio Padrão no intervalo de confiança

- Os intervalos de confiança são a forma predominante de estimativa por intervalo.
- A estimativa por intervalo especifica um intervalo dentro do qual o parâmetro deve estar.
- Os intervalos de confiança são usados para indicar a confiabilidade de uma estimativa. Por exemplo, o intervalo de confiança pode ser usado para descrever o quão confiáveis são os resultados de uma pesquisa (uma pesquisa com intervalo de confiança menor é mais confiável que uma pesquisa com intervalo de confiança maior).

Intervalo de confiança para o desvio padrão

- Como o desvio padrão é a raiz quadrada da variância, pode-se usar a seguinte fórmula:

Intervalo de confiança para a variância

$$IC(\sigma^2;\gamma) = [\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\text{sup}}};\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\text{inf}}}]$$

Intervalo de confiança para o desvio padrão

$$\text{IC}=\left(s.\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\text{Sup}}}} \leq \sigma \leq s.\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\text{Inf}}}}\right) = 1-\alpha$$

- Com a distribuição qui-quadrado de parâmetro: $\varphi = (n-1)$.
- A apresentação segue o modelo já apresentado.

Dado o intervalo de confiança anterior para a variância, para sabermos o intervalo de confiança para o desvio padrão Tiraremos a Raiz quadrada do intervalo para a variância. Segue

O intervalo de confiança de σ^2 é

$$\frac{0{,}034105}{32{,}852} \leq \sigma^2 \leq \frac{0{,}034105}{8{,}907} = 1{,}0382.10^{-3}mm \leq \sigma^2 \leq 3{,}8291.\,10^{-3}\text{mm.}$$

O intervalo de confiança de σ é

$$\sqrt{1{,}0382.10^{-3}}mm \leq \sigma \leq \sqrt{3{,}8291.\,10^{-3}}\text{mm.}$$

$$= 0{,}0322\ mm \leq \sigma \leq 0{,}0619\ mm$$

Referências Bibliográficas:

Aula 11 – Estimação de parâmetros populacionais por ponto e intervalo. **fsp.usp.** Disponível em: <http://www.fsp.usp.br/jmpsouza/wp-content/psp5101/04_intervaloconfianca.pdf> . Acesso em 13 de out. de 2021.

Definição de intervalo de confiança. **Economiaenegócios**. Disponível em: <https://economiaenegocios.com/definicao-de-intervalo-de-confianca/>. Acesso em 13 de out. de 2021.

Desvio Padrão. TodaMatéria. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/desvio-padrao/#:~:text=O%20desvio%20padr%C3%A3o%20%C3%A9%20uma,mais%20homog%C3%AAneo%20s%C3%A3o%20os%20dados>. Acesso em 14 de out. de 2021.

Intervalo de confiança. **Wikipédia.** Disponível em : <https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Intervalo_de_confian%C3%A7a>. Acesso em 14 de out de 2021.

Interval Estimation for the Variance. **Helm.** Disponível em: <https://learn.lboro.ac.uk/archive/olmp/olmp_resources/pages/workbooks_1_50_jan2008/Workbook40/40_2_intvl_est_var.pdf>. Acesso em 14 de out. de 2021.

Medidas de tendência central,dispersão, posição, associação e boxplot. **lec.pro**. Disponível em : <https://lec.pro.br/download/material_didatico/pdf_files/est_basica/medidas_boxplot.pdf>. Acesso em 14 de out. de 2021

What are Confidence Intervals in Statistics?. **SimplyPsychology.** Disponível em: <https://www.simplypsychology.org/confidence-interval.html>. Acesso em 13 de out. de 2021.