Daniel Queiroz

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

INTRODUÇÃO

O que é uma variável aleatória?
Um tipo de variável que <u>depende</u> do resultado aleatório de um experimento aleatório.

Diz-se que um experimento é aleatório se não se pode prever o resultado exato no fim do dado experimento.

INTRODUÇÃO

Uma **variável aleatória** pode ser entendida como uma variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios.

Formalmente, uma variável aleatória é definida como uma função que associa um elemento do espaço amostral a um valor numérico.

<u>Exemplo</u>
Seja um experimento aleatório que consiste no lançamento de duas moedas simultaneamente e deseja-se saber a quantidade de “caras” a cada lançamento.

INTRODUÇÃO

Variáveis aleatórias são subdivididas em dois grupos:

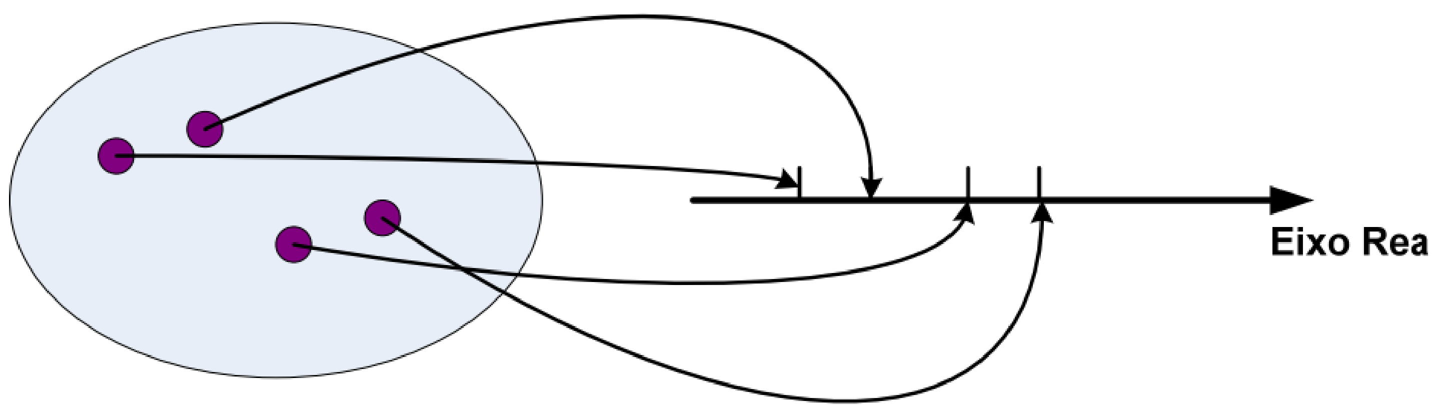
- Variáveis aleatórias discretas
  Relativas a quantidades, contagens e enumerações finitas ou infinitas.
- Variáveis aleatórias continuas
  Relativas a coleções de intervalos.

DEFINIÇÃO

- Variável aleatória discreta

Suponha um experimento “E” e um o espaço amostral “Ω”, associado ao experimento.

Uma função X , que associe a cada elemento (w ∈ Ω) um número real X(s) é denominada ***variável aleatória***.



EXEMPLO

Seja o lançamento de duas moedas simultaneamente. Os resultados elementares deste

experimento podem ser listados na Tabela 1 adiante (toma-se cara como H e coroa como T, de *head* e *tail*, respectivamente).

Tabela 1: Resultados do experimento "lançamento de duas moedas".

Resultado	Símbolo
Cara – Cara	HH
Cara – Coroa	HT
Coroa – Cara	TH
Coroa – Coroa	TT

EXEMPLO

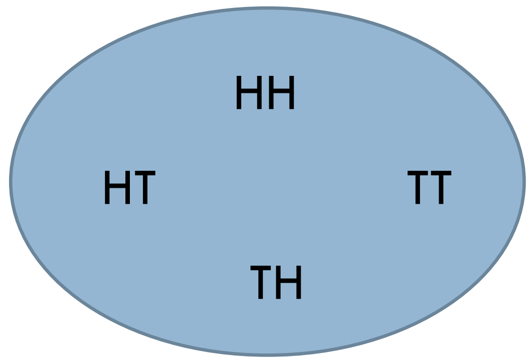


Figura 4: Espaço amostral do lançamento de duas moedas.

Pode-se estabelecer a probabilidade de ocorrência dos eventos, conforme a Tabela 2.

Resultado	Símbolo	Probabilidade
Cara – Cara	HH	0,25
Cara – Coroa	HT	0,25
Coroa – Cara	TH	0,25
Coroa – Coroa	TT	0,25

Tabela 2: Probabilidade de ocorrência dos resultados do lançamento de duas moedas.

EXEMPLO

Experimento E: Lançamento de duas moedas.

Função Y: Quantidade de caras obtidas nas duas moedas.

Espaço Amostral S: {(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)}

Numero de Caras	Probabilidade
Y(T, T) = 0	1/4
Y(H, T) = Y(T, H) = 1	2/4
Y(H, H) = 2	1/4

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

TIPOS DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Função de distribuição acumulada

- Apresenta a probabilidade de uma variável aleatória assumir valores **até** determinado ponto.
- Por exemplo:
  Qual a probabilidade de se conseguir um número menor que 7 no lançamento de dois dados?

Propriedades :

$$F(y) = \sum_{y_i \leq y} P(y_i) \qquad \text{(cálculo de F(y))}$$

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(+\infty) = 1$$

$$P(a < Y \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$P(a \leq Y \leq b) = F(b) - F(a) + P(Y = a)$$

$$P(a < Y < b) = F(b) - F(a) - P(Y = b)$$

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE

Função de probabilidade (ou função de densidade de probabilidade)

- Em estatística, a função (massa) de probabilidade é uma função que associa a cada possível ocorrência de uma variável aleatória discreta uma probabilidade.
- Apresenta a probabilidade de uma variável aleatória assumir **exatamente** um valor do domínio.

$$f(Y = y_i) = p(y_i) = p_i$$

Por exemplo:
S={1,2,3,4,5} / A={0,1} (supomos: 0 significa falso e 1 verdadeiro)

X: é número par (X é a variável aleatória) X: S → A

A cardinalidade do espaço amostral S é 5.

Então temos,

- `X: x=0 x=1`
- `f(x): 3/5 2/5`

ESPERANÇA MATEMÁTICA

Valor esperado, também chamado **esperança matemática** ou **expectância**, de uma variável aleatória é a soma das probabilidades de cada possibilidade de saída da experiência multiplicada pelo seu valor. Isto é, representa o valor médio "esperado" de uma experiência se ela for repetida muitas vezes.

Note que a esperança matemática não diz qual valor tem a maior probabilidade de ocorrer.

É definida pela soma das probabilidades dos valores multiplicado pelos seus respectivos valores.

$$E(Y) = \sum P(y_i).\, y_i$$

ESPERANÇA MATEMÁTICA

Exemplo:

E = Esperança matemática

Y = ponto obtido

Y = 1, 2, 3, 4, 5, 6

P(Y) = 1/6 para todo Y

$Valores\ (Y)$	$P(Y)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

$$E(Y) = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = 3{,}5$$

DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

Modelo ou Distribuição de Bernoulli

Quando executamos um experimento (ensaio) do tipo Bernoulli, associado a este ensaio, temos uma variável aleatória com o seguinte comportamento:

- Suponhamos a realização de um experimento E, cujo resultado pode ser um sucesso (se acontecer o evento que nos interessa) ou um fracasso (o evento não se realiza).
- Seja $\boldsymbol{p}$ a probabilidade de *sucesso* e $\boldsymbol{q}$ a probabilidade de *fracasso*, com $\boldsymbol{p + q = 1}$.
- Definimos a seguinte v.a. discreta: X : *nº de sucessos em uma única tentativa do experimento*.
- X assume os valores:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{fracasso} \\ 1, & \text{sucesso} \end{cases} \qquad \text{com } P(X=0) = q \text{ e } P(X=1) = p.$$

Nessas condições a v.a. X tem *distribuição de* Bernoulli, e sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = p^{x} \cdot q^{1-x}$$

DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

Esperança (média) e Variância

Calcularemos a média e a variância da variável com distribuição de Bernoulli.

X	P(X)	X.P(X)	X.X.P(X)
0	q	0	0
1	p	p	p
	1	p	p

Esp(X) = p

Var(X) = p – p^2 = p(1 – p) = p.q

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Um experimento binomial (baseando-se na **Tentativa de Bernoulli**) é um experimento aleatório onde as repetidas tentativas também resultam em apenas dois resultados. O diferencial é que na **distribuição binomial** a variável aleatória indica a probabilidade de ***x*** sucessos em ***n*** tentativas.

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

O processo binomial possui as seguintes propriedades:

- As tentativas num experimento são independentes;
- Cada tentativa só resulta em um resultado: sucesso ou insucesso;
- A probabilidade de sucesso é constante (assim também é a probabilidade do fracasso) .

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

A variável aleatória discreta denota o número de sucessos dado um experimento aleatório binomial e a função de probabilidade dessa variável é definida por:

$$P(x) = f(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

$onde$:

- $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$;
- x *é o número de sucessos desejados*;
- n *é o número de tentativas*;
- p *é a probabilidade do sucesso individual.*

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

- A esperança matemática (média) é definida por:

$$E(X) = np$$

- A variância é dada por:

$$\sigma^2 = V(x) = np(1-p)$$

- A distribuição binomial é obtida através da expansão binomial:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Onde $a = p$ (sucesso) e $b = 1 - p$ (insucesso)

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Exemplo

- Uma amostra de ar tem 10% de chance de conter uma certa molécula rara. Encontre a probabilidade de que nas próximas 18 amostras, exatamente 2 contenham a molécula rara.

$Temos$:

- ✓ $x = 2$
- ✓ $n = 18$
- ✓ $p = 0.1$

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(2) = \binom{18}{2} 0.1^2 (1-0.1)^{18-2}$$

$$P(2) = 0.283$$

O resultado indica que há a probabilidade de se encontrar a molécula rara em *2* das próximas *18* amostras coletadas. E essa probabilidade é de aproximadamente *28%*.

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

A **Distribuição de Poisson** expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer num certo período de tempo ou região espacial.

Na distribuição anterior levávamos em consideração os sucessos e os insucessos. Na **Distribuição de Poisson**, levaremos em conta apenas os sucessos num determinado intervalo.

Exemplo

Os times de futebol, num determinado campeonato, fazem em média 15 gols em todo o campeonato (“15 sucessos”). Porém se um time termina um campeonato com 10 gols, não tem sentido falar que este time teve ao longo o campeonato 10 gols e 5 “não gols”.

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

A distribuição de Poisson trabalha com a contagem de sucessos num intervalo subdividido em subintervalos.

As propriedades do processo de Poisson são:

- A probabilidade de mais de uma contagem num subintervalo é zero;
- A contagem em cada subintervalo independe de outros intervalos;
- A probabilidade de uma contagem (probabilidade de um sucesso) em um subintervalo é o mesmo para todos os subintervalos e é proporcional ao comprimento do intervalo.

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

A função de probabilidade de Poisson é definida por:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}$$

$onde$:

- λ $número\ médio\ de\ eventos\ num\ intrevalo$;
- x $é\ o\ número\ de\ contagens\ (sucessos)$.

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

A esperança matemática (média) é definida por:

$$E(X) = \lambda$$

A variância é dada por:

$$\sigma^2 = V(x) = \lambda$$

Exemplo

Em um fio delgado de cobre, o número de falhas no fio segue a distribuição de Poisson, com uma média de 2,3 falhas por milímetro. Determine a probabilidade de existir exatamente 2 falhas em um milímetro de fio.

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Exemplo

- Em um fio delgado de cobre, o número de falhas no fio segue a distribuição de Poisson, com uma média de 2,3 falhas por milímetro. Determine a probabilidade de existir exatamente 2 falhas em um milímetro de fio.

$Temos$:

✓ $x = 2$

✓ $\lambda = 2{,}3$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}$$

$$f(2) = \frac{e^{-2{,}3}.2{,}3^{2}}{2!}$$

$$f(2) = 0{,}265$$

OUTRAS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DISCRETAS

Distribuição binomial negativa

- A variável aleatória discreta representa o número de tentativas necessárias para se obter *k* sucessos.

Distribuição geométrica

- Semelhante à distribuição binomial negativa, mas neste caso a variável aleatória representa o número de tentativas necessárias para se conseguir o primeiro sucesso.

Distribuição hipergeométrica

- Descreve a probabilidade de se retirar elementos de um determinado tipo numa sequência de ***n*** extrações de uma população finita e sem reposição.

EXEMPLO

Uma jogada única de uma moeda. A moeda pode dar "coroa" com probabilidade e "cara" com probabilidade . A experiência é dita justa se P = 0,5 , indicando a origem dessa terminologia em jogos de aposta (a aposta é justa se ambos os possíveis resultados tem a mesma probabilidade).

A f [função de probabilidade] dessa distribuição é:

$$f(k;p) = \begin{cases} p & \text{se } k = 1, \\ 1 - p & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

EXEMPLO

Um jogador lança 3 moedas não viciadas, ele ganha R$ 6,00 se tres caras ocorrerem, ganha R$3,00 se duas caras ocorrerem e ganha R$ 1,00 se somente uma cara ocorrer. Por outro lado, ele perde R$ 10,00 se 3 coroas ocorrerem, encontre o valor esperado do jogo.

EXEMPLO

S: {(Ca, Ca, Ca), (Ca, Ca, Co), (Ca, Co, Co), (Co, Co, Co), (Co, Co, Ca), (Co, Ca, Ca), (Co, Ca, Co), (Ca, Co, Ca)}

n(S) = 8

M = E(x)

X	P(X)	X.P(X)	X^2	X^2 . P(x)
6,00	1/8	6/8	36	36/8
3,00	3/8	9/8	9	27/8
1,00	3/8	3/8	1	3/8
-10,00	1/8	-10/8	100	100/8

EXEMPLO

$M = E(x) = X.P(x)$

$E(x) = 6/8 + 9/8 + 3/8 - 10/8 = 8/8 = 1$

$Var(x) = \partial^2$

$Var(x) = [\text{ Somatorio } x^2 . P(x)] – M^2$

$Var(x) = 166/8 – 1^2$

$Var(x) = 19,75$

$\partial = \sqrt{19,75} = 4,44$