Variáveis Aleatórias Contínuas

Discente: Adaptado do seminário de André Luiz Cardoso de Sousa
Docente: Prof. José Cláudio Faria

Roteiro

- Variável Aleatória Contínua
  - O que é?
  - Exemplos
- Função Densidade de Probabilidade
  - Conceito
  - Exemplo
- Principais Distribuições
  - Distribuição Normal
  - Distribuição t de student
  - Distribuição Qui-Quadrado
  - Distribuição F
- Referências

Variável Aleatória Contínua

Conceito e exemplos

O que é uma variável aleatória contínua (VCA)?

Variável Aleatória Contínua (VAC) é aquela que pode tomar qualquer valor numérico em um determinado intervalo ou coleção de intervalos.

Ou seja, entre quaisquer de dois elementos vizinhos há quantidades intermediárias infinitas, dependentes da sensibilidade do instrumento de medida.

O que é uma variável aleatória contínua (VCA)?

- Exemplo 1

Uma válvula eletrônica é instalada em um circuito, sendo X o período de tempo que a válvula funciona.

Neste caso, X é uma vac podendo tomar valores nos reais positivos, ou seja, o subconjunto dos números reais [0, inf.).

O que é uma variável aleatória contínua (VCA)?

- Exemplo 2

Um navio petroleiro sofre um acidente no qual seu casco é rompido e o óleo é derramado. Seja Y a variável aleatória que determina a área atingida pelo óleo do navio.

Neste caso, temos que a variável Y é uma vac que assume valores no subconjunto dos números reais [0, inf.).

O que é uma variável aleatória contínua (VCA)?

- Exemplo 3

Imagine nas Olimpíadas o lançamento de martelo. Sabemos de antemão que os valores do lançamento de martelo atingem no máximo a distância de 60 metros e a distância mínima classificatória de 30. Ou seja, todos os lançamentos serão dentro desse intervalo, podendo assumir uma infinidade de possibilidades, pois sempre existirá uma fração para medir a menor diferença possível entre um lançamento e outro, como 59,2512m.

Neste caso X seria uma vac que assume qualquer valor no intervalo $30 > X < 60$.

Função Densidade de Probabilidade (FDP)

Conceito e exemplo

Função Densidade de Probabilidade (FDP)

Seja Y uma VAC, a função densidade de probabilidade f(y) é uma função que satisfaz as seguintes condições:

$$a)\ f(y) \geq 0 \ \ para\ \ todo\ y \in [a,b]\ com\ \ a < b$$

$$b) \int_a^b f(y)dy = 1$$

$$P(c < Y < d) = \int_c^d f(y)dy$$

Função Densidade de Probabilidade (FDP)

Observações importantes:

A definição anterior mostra que a probabilidade de qualquer valor especificado de Y, por exemplo, y_0, tem $P(Y = y_0) = 0$, pois:

$$P(Y = y_0) = \int_{y_0}^{y_0} f(y)dy = 0$$

$$P(a \le Y \le b) = P(a \le Y < b) = P(a < Y \le b) = P(a < Y < b)$$

Função Densidade de Probabilidade (FDP)

Notar que f(y), densidade de probabilidade, não é probabilidade. Somente quando a função for integrada entre dois limites, ela produzirá uma probabilidade, que será a área sob a curva da função densidade de probabilidade entre y = a e y = b, considerando a < b.

Para VADs, a probabilidade está concentrada em pontos isolados da reta real.

No caso de VACs, a probabilidade está espalhada de modo contínuo em segmentos da reta real.

A área total sob a curva de probabilidade vale sempre um (1):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = 1$$

Função Densidade de Probabilidade (FDP)

- Exemplo

Seja Y uma VAC, com a seguinte função densidade de probabilidade:

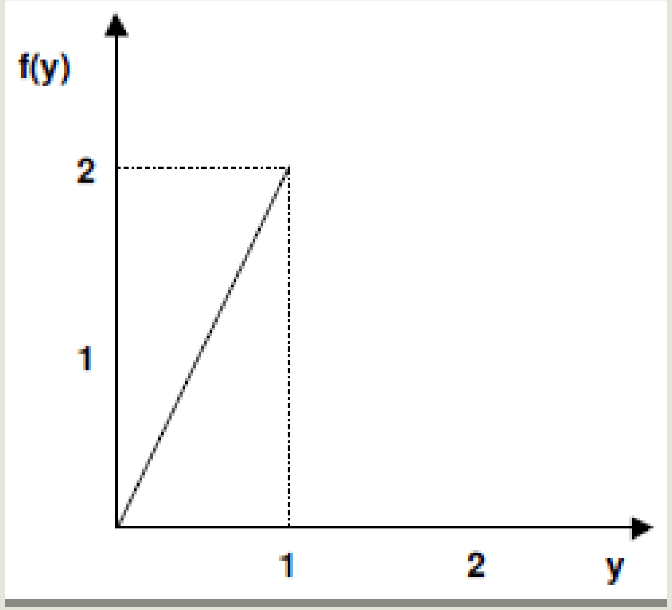
$$f(y) = \begin{cases} 2y \;\; para \;\; 0 < y < 1 \\ 0 \; para \; quaisquer \; outros \; valores \end{cases}$$

$$f(y) \geq 0 \;\; e \;\; para \;\; todo \;\; y \in Ry$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = \int_{-\infty}^{0} dy + \int_{0}^{1} 2ydy + \int_{1}^{+\infty} dy = 2\times\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=1} - \left(2\times\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}\right) = 1 = y^2$$

Função Densidade de Probabilidade (FDP)

Seu gráfico será:



Função Densidade de Probabilidade (FDP)

Quanto a F(y) (distribuição acumulada) tem-se:

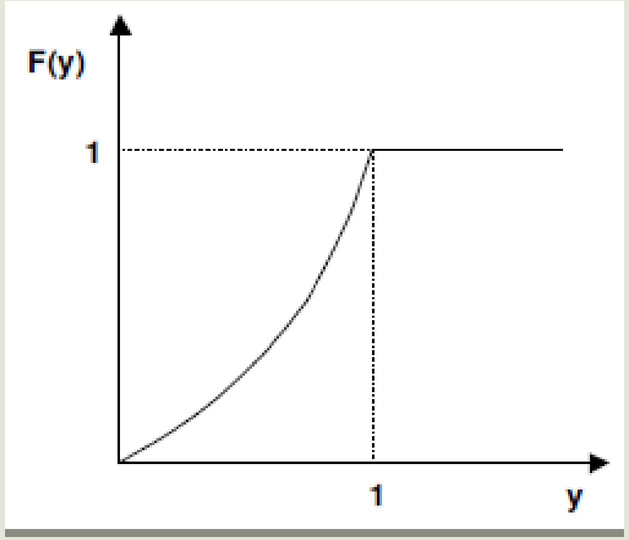
$$para \quad y<0 \qquad F(y)=\int_{-\infty}^{0} 0dy=0$$

$$para \quad 0\le y<1 \qquad F(y)=\int_{-\infty}^{0} 0dy+\int_{0}^{1} 2ydy=y^2$$

$$para \quad y\ge 1 \qquad F(y)=\int_{-\infty}^{0} 0dy+\int_{0}^{1} 2ydy+\int_{1}^{+\infty} 0dy=1$$

Função Densidade de Probabilidade (FDP)

Cujo gráfico será:



O gráfico de F(y) no caso de uma VAD é constituído por segmentos de retas horizontais (degraus), e no caso de uma VAC, ele é contínuo para todo y.

Exemplo em R

- Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} 2\exp(-2x) & , \text{se } x \geq 0 \\ 0 & , \text{se } x < 0 \end{cases}$$

a) Mostre que está função é uma FDP
b) Calcule a probabilidade de que X > 1
c) Calcule a probabilidade de que 0.2 < X < 0.8

Exemplo em R

- Letra A

Para verificar que a integral da função é igual a 1 podemos usar a função integrate que efetua integração numérica. A função recebe como argumentos o objeto com a função a ser integrada e os limites de integração.
Neste exemplo o objeto é f1 definido acima e o domínio da função é [0, inf.].

(Script em R)

Exemplo em R

- Letras B e C

Para fazer cálculos pedidos nos itens (b) e (c) lembramos que a probabilidade é dada pela área sob a curva da função no intervalo pedido. Desta forma as soluções seriam dadas pelas expressões

$$
\begin{aligned}
p_b &= P(X > 1) = \int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} 2\, e^{-2x} dx \\
p_c &= P(0,2 < X < 0,8) = \int_{0,2}^{0,8} f(x)dx = \int_{0.2}^{0.8} 2\, e^{-2x} dx
\end{aligned}
$$

(Script em R)

Principais Distribuições

- Normal
- t de student
- Qui-quadrado
- F

Distribuição Normal

A distribuição normal é a mais importante distribuição de variáveis aleatórias contínuas em razão da sua enorme aplicação nos mais variados campos do conhecimento.

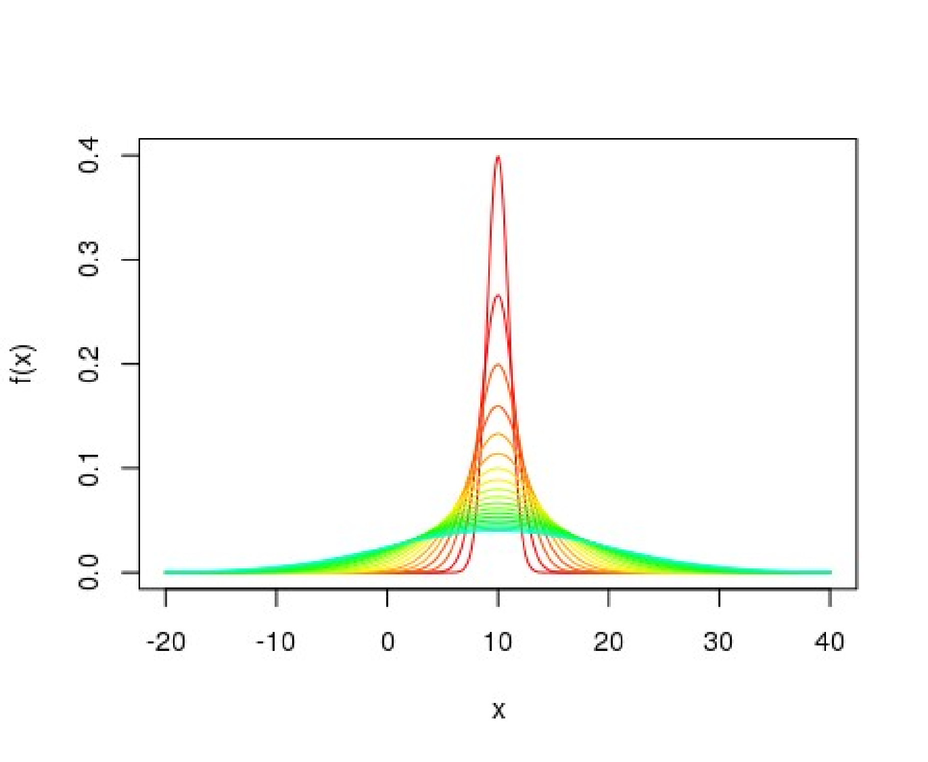
Possui dois parâmetros característicos μ e σ^2 que correspondem respectivamente a média e a variância da distribuição.

A distribuição normal com média $\mu=0$ e variância $\sigma^2=1$ é conhecida como distribuição normal reduzida ou padronizada. Uma variável aleatória com essa distribuição geralmente é simbolizada pela letra Z.

$$f(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}, -\infty < x < \infty, \sigma > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

Distribuição Normal



$$f(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}, -\infty < x < \infty, \sigma > 0$$

Distribuição Normal

No R, a distribuição normal pode ser utilizada por meio das funções abaixo, em todas elas pode ser definir a média (mean) e o desvio padrão (sd):

- dnorm(x, mean, sd) - densidade de probabilidade no ponto x
- pnorm(x, mean, sd) - função de probabilidade acumulada no ponto x
- qnorm(p, mean, sd) - quantil correspondente a uma dada probabilidade p
- rnomr(n, mean, sd) - amostra da distribuição normal de tamanho n

(Script em R)

Distribuição t de student

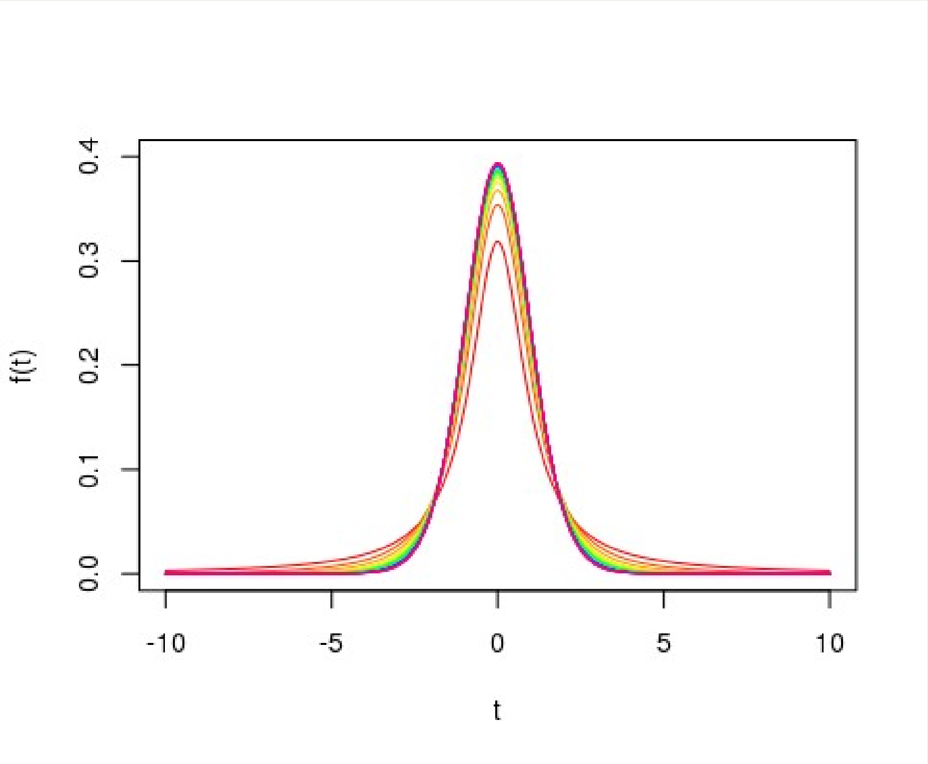
A distribuição t de Student aparece naturalmente no problema de se determinar a média de uma população (que segue a distribuição normal) a partir de uma amostra.

Neste problema, não se sabe qual é a média ou o desvio padrão da população, mas ela deve ser normal. Na distribuição t existe uma curva para cada tamanho de amostra (n: número de graus de liberdade) e todas curvas tem máximo em t = 0.

A medida que n cresce a distribuição t se aproxima da normal padrão z.

$$f(t) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{n\,\pi}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Distribuição t de student



$$f(t) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{n\,\pi}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Distribuição t de student

No R, a distribuição t pode ser utilizada por meio das funções abaixo, em todas elas pode ser definir o grau de liberdade (df):

- dt(x, df) - densidade de probabilidade no ponto x
- pt(x, df) - função de probabilidade acumulada no ponto x
- qt(p, df) - quantil correspondente a uma dada probabilidade p
- rt(n, df) - amostra da distribuição t de tamanho n

(Script em R)

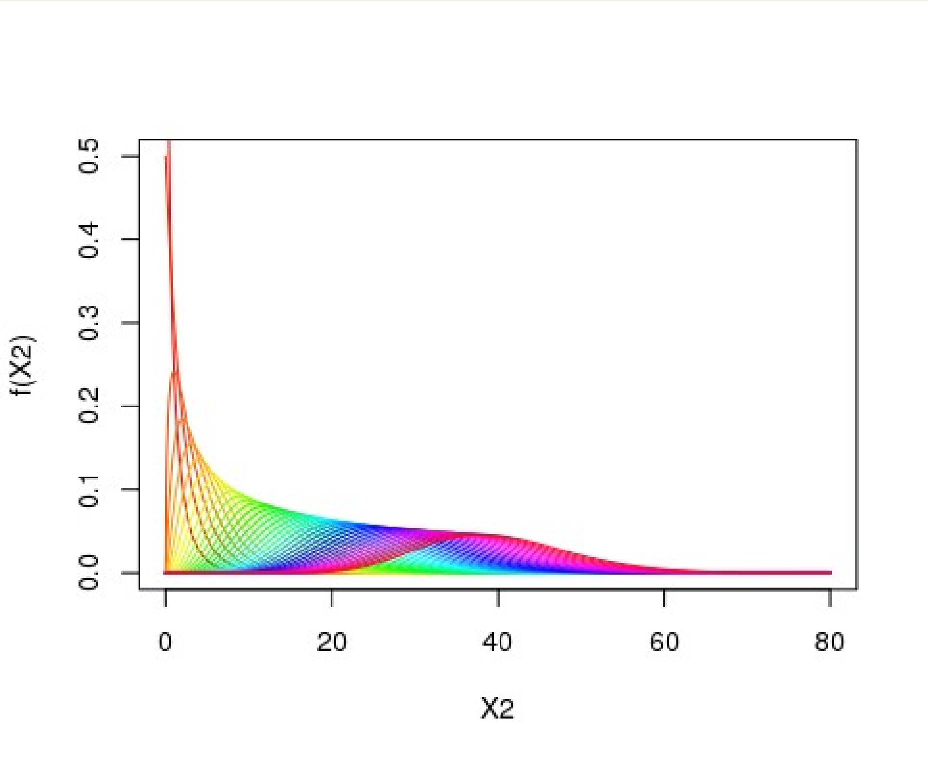
Distribuição Qui-Quadrado

Retirando-se uma amostra de *n* elementos de uma população normal com média (µ) e variância (σ²), então, a distribuição amostral da variância amostral segue uma distribuição de (qui-quadrado) com n-1 graus de liberdade.

Na distribuição X^2 existe uma curva para cada tamanho de amostra (n) e todas curvas tem início em $X^2=0$.

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\, x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad 0 < x < \infty$$

Distribuição Qui-Quadrado



$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad 0 < x < \infty$$

Distribuição Qui-Quadrado

No R, a distribuição X^2 pode ser utilizada por meio das funções abaixo, em todas elas pode ser definir o grau de liberdade (df):

- dchisq(x, df) - densidade de probabilidade no ponto x
- pchisq(x, df) - função de probabilidade acumulada no ponto x
- qchisq(p, df) - quantil correspondente a uma dada probabilidade p
- rchisq(n, df) - amostra da distribuição X^2 de tamanho n

(Script em R)

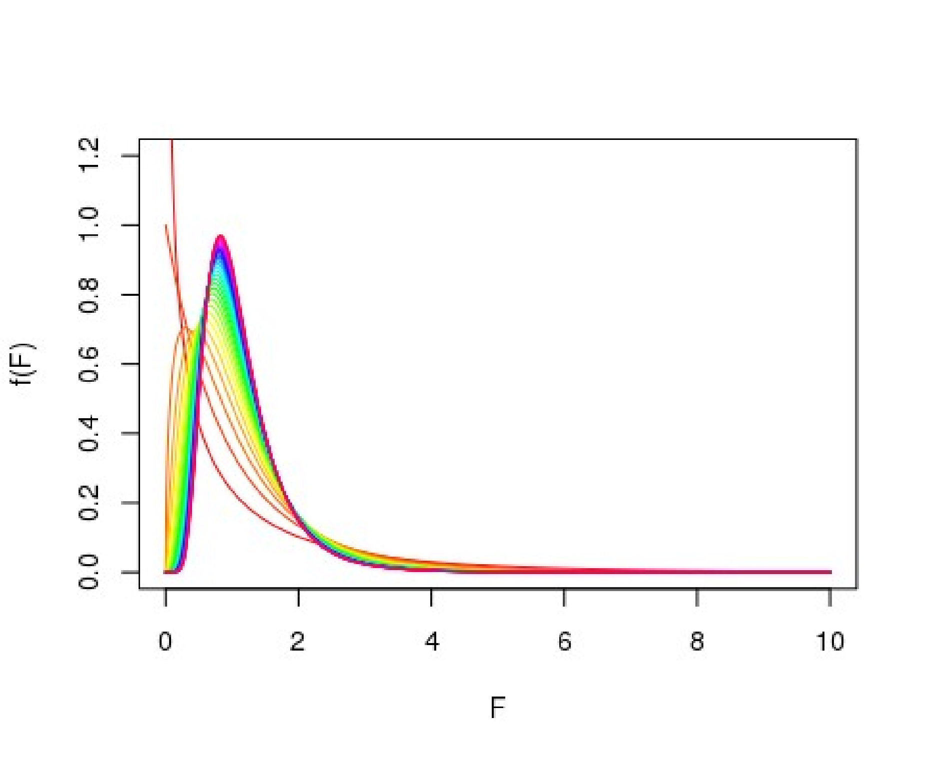
Distribuição F

A distribuição F está entre as distribuições de probabilidade mais importantes na estatística.

Essa distribuição é definida pela variável resultante da razão entre duas variâncias. Nesta distribuição é necessário observar dois graus de liberdade m e n, o primeiro associado à variância amostral do numerador, e o segundo associado à variância amostral do denominador.

$$f(x) = \frac{\Gamma[(m+n)/2]}{\Gamma(m/2)\,\Gamma(n/2)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \frac{x^{(m-2)/2}}{[1 + (m/n)x]^{(m+n)/2}}, \quad x \geq 0$$

Distribuição F



$$f(x) = \frac{\Gamma[(m+n)/2]}{\Gamma(m/2)\,\Gamma(n/2)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \frac{x^{(m-2)/2}}{[1+(m/n)x]^{(m+n)/2}}, \quad x \geq 0$$

Distribuição F

No R, a distribuição F pode ser utilizada por meio das funções abaixo, em todas elas pode se definir os graus de liberdade do numerador (df1) e denominador (df2):

- df(x, df1, df2) - densidade de probabilidade no ponto x
- pf(x, df1, df2) - função de probabilidade acumulada no ponto x
- qf(p, df1, df2) - quantil correspondente a uma dada probabilidade p
- rf(n, df1, df2) - amostra da distribuição F de tamanho n

(Script em R)