INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE PROBABILIDADE

Leno Matos

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

- A história da teoria da probabilidade teve início na tentativa de explicar os jogos de azar.

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

- No estudo de um fenômeno de observação, cumpre-se distinguir o fenômeno e o modelo:
  - Determinístico
  - Probabilístico ou estocásticos

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

- Determinísticos: conduzem sempre a um mesmo resultado em condições iniciais idênticas.

- Probabilísticos ou estocásticos: podem conduzir a diferentes resultados mesmo em condições iniciais idênticas.

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

- Os fenômenos estudados pela probabilidade, mesmo em condições normais de experimentação, podem variar de uma observação para outra, dificultando a previsão de um resultado futuro.

- Adoção do cálculo matemático probabilístico:
  - Experimento
  - Ponto Amostral

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

Experimento	Resultado experimental
Jogar uma moeda	cara, coroa
Retirar uma carta de um baralho	copa, ouro, paus, espada
Jogar um dado	1, 2, 3, 4, 5, 6
Selecionar uma peça para inspeção	defeituosa, não defeituosa

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

- Análise desse experimento revela que:
  - Cada experimento poderá ser repetido indefinidamente sob as mesmas condições.
  - Não se conhece “a priori” um resultado particular do experimento.
  - Quando o experimento for repetido um grande número de vezes, surgirá uma regularidade, isto é, haverá uma estabilidade da fração:

$$fi = n/N$$

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

- Onde:

$$fi = \frac{n}{N}$$

- fi : frequência relativa
- n: número de sucessos de um particular resultado
- N: número de repetições

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

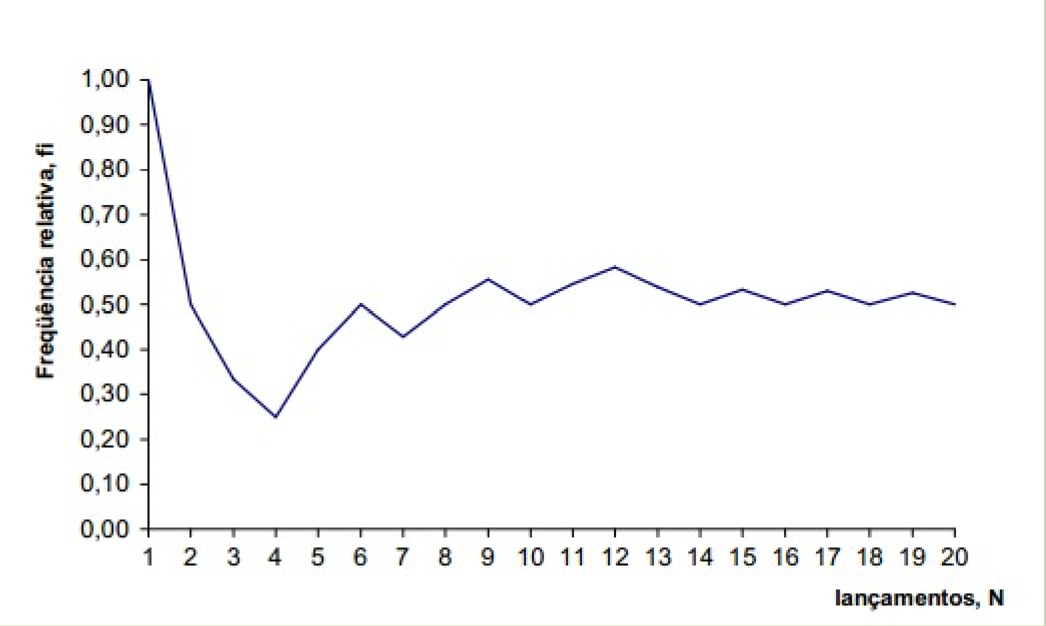
- Exemplo para o lançamento de uma moeda:

  Sucesso = cara → **c**

  Insucesso = coroa → **K**

c/k	lan	suc/lan = n/N	fi
c	1	1/1	1,00
k	2	1/2	0,50
k	3	1/3	0,33
k	4	1/4	0,25
c	5	2/5	0,40
c	6	3/6	0,50
k	7	3/7	0,43
c	8	4/8	0,50
c	9	5/9	0,56
k	10	5/10	0,50
c	11	6/11	0,55
c	12	7/12	0,58
k	13	7/13	0,54
k	14	7/14	0,50
c	15	8/15	0,53
k	16	8/16	0,50
c	17	9/17	0,53
k	18	9/18	0,50
c	19	10/19	0,53
k	20	10/20	0,50

INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE



- Verificação da estabilização da frequência relativa de caras de uma moeda não viciada em função do aumento do número de lançamentos.

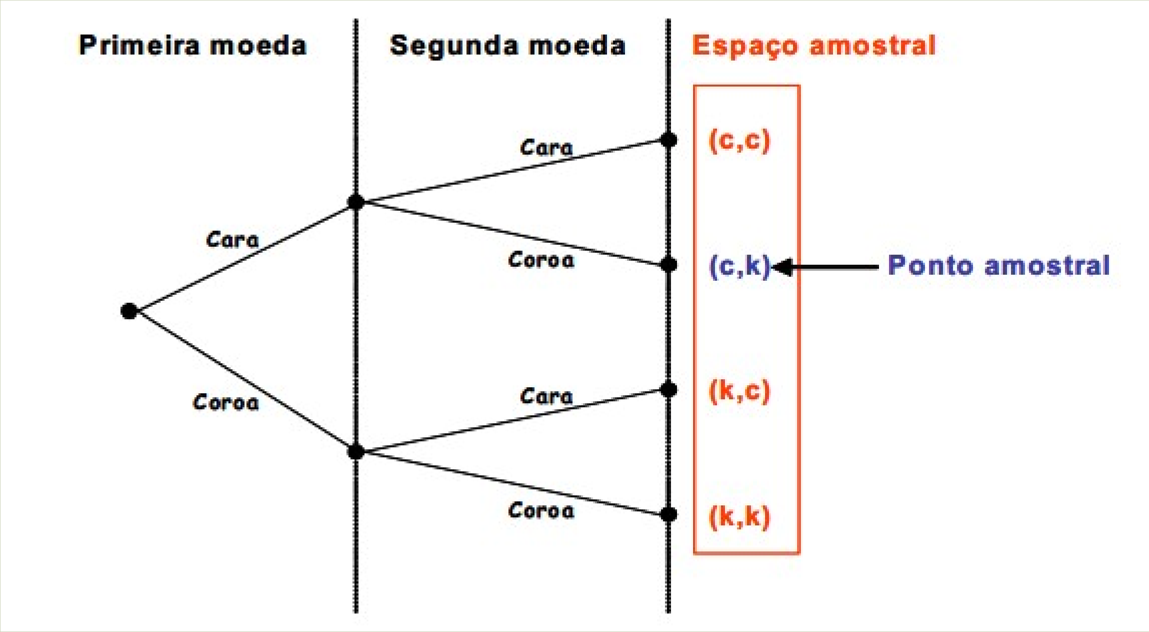
ESPAÇO AMOSTRAL

- O espaço amostral de um experimento aleatório definido por S, é o conjunto com todos os possíveis resultados desse experimento.

- Exemplo de Espaços Amostrais:
  - Lançamento de um dado: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - Lançamento de duas moedas: S = {(c,c),(c,k),(k,c),(k,k)}

ESPAÇO AMOSTRAL

- Diagrama de árvore:



Obs: muito útil para definir o espaço amostral de experimentos aleatórios.

EVENTOS

- É qualquer subconjunto do espaço amostral S de um experimento aleatório.
  - Considerando S e Φ(conjunto vazio) como eventos:
  - S: é dito evento certo
  - Φ: é dito evento impossível

- **Evento certo**: é um evento que ocorre em qualquer realização do experimento aleatório.

- Se E = S, é chamado de evento certo.

EVENTOS

- Exemplo de evento certo:
- Seja S = {1, 3, 5, 7}
- C: um número ímpar = C {1, 3, 5, 7}:

C = S (evento certo)

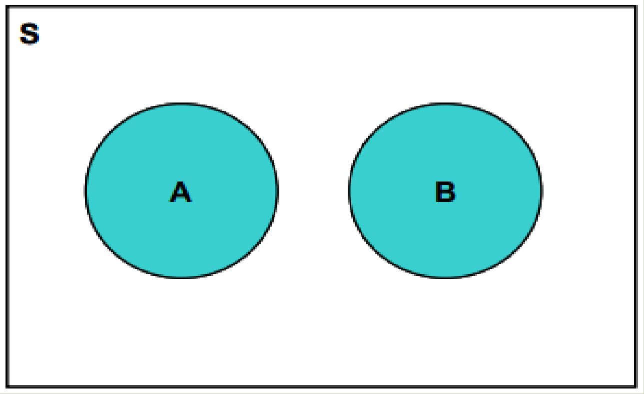
- Para todos os valores do conjunto S, o evento C (um número ímpar), ocorre. Então C = S logo C é um evento certo.

EVENTOS

- **Evento elementar**: é formado por um único elemento do espaço amostral. Se E ⊂ S e E é um conjunto unitário.
- **Evento impossível**: é aquele que não ocorrer em nenhuma situação. O Φ é dito evento impossível.
- **Evento complementar**: Seja um evento A qualquer, o evento $\bar{A}$ (complementar de A), tal que $\bar{A} = S - A$, ou seja é um conjunto com todos os elementos que pertencem a S e não pertencem a A.

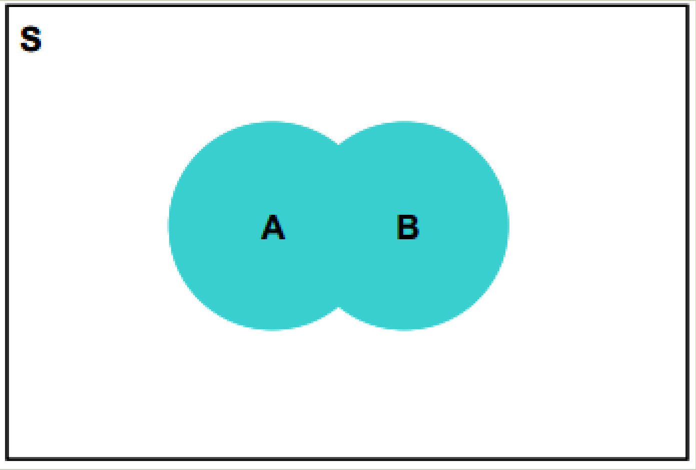
EVENTOS

- **Eventos equiprováveis:** quando para cada ponto amostral se tem a mesma probabilidade, o espaço amostral chama-se equiprovável ou uniforme. Isto significa que todos os pontos tem a mesma probabilidade de ocorrer: P = 1/n
- **Eventos mutuamente exclusivos:** eventos são declarados mutuamente exclusivos se eles não puderem ocorrer simultaneamente em **S**.
  - Ex: Jogar um dado, evento A: ser ímpar e evento B: ser par.



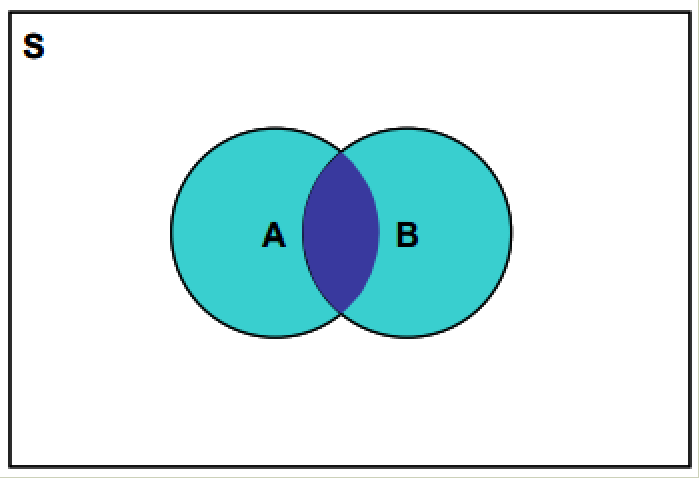
EVENTOS

- Utilizando operações de conjuntos, novos conjuntos podem ser formados.
- AUB: é o evento que ocorre se A ocorre ou B ocorre, ou ambos ocorrem.



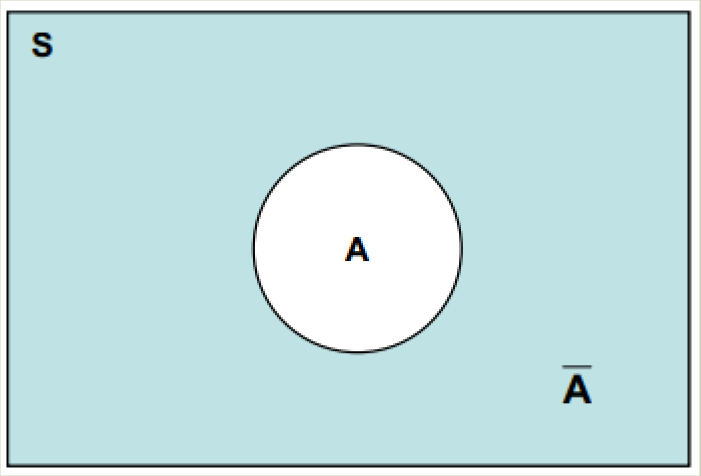
EVENTOS

- A∩B: o evento que ocorre em A e B simultaneamente



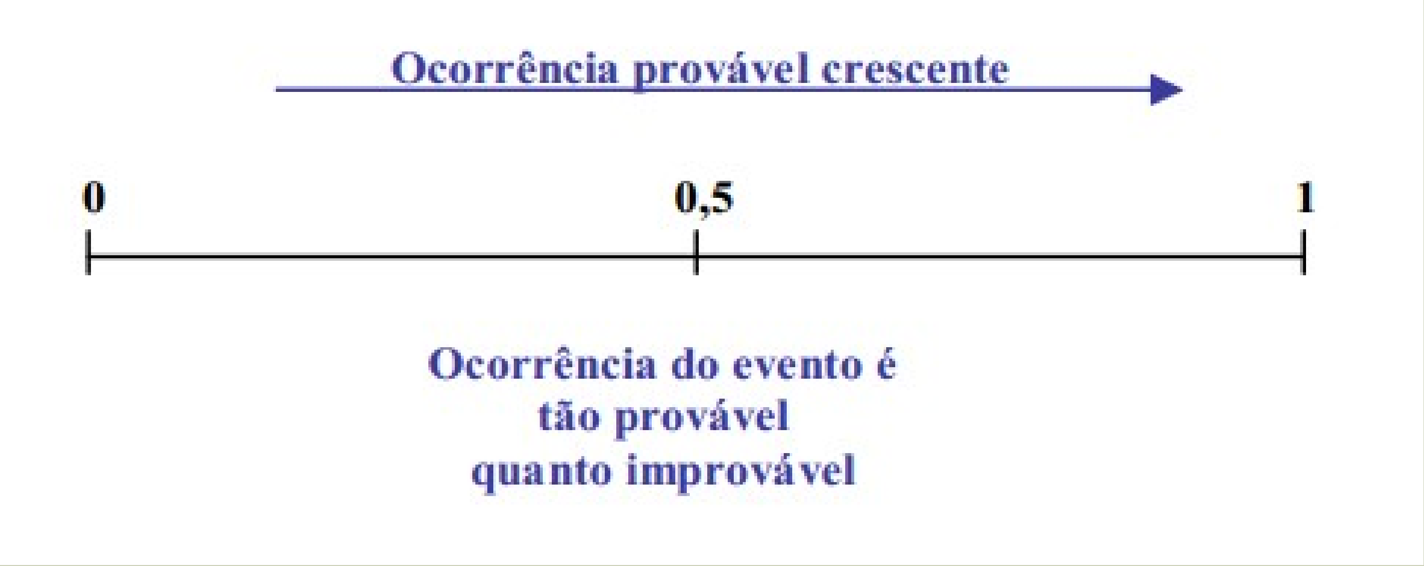
EVENTOS

- $\bar{A}$: é o evento que ocorre se A não ocorrer



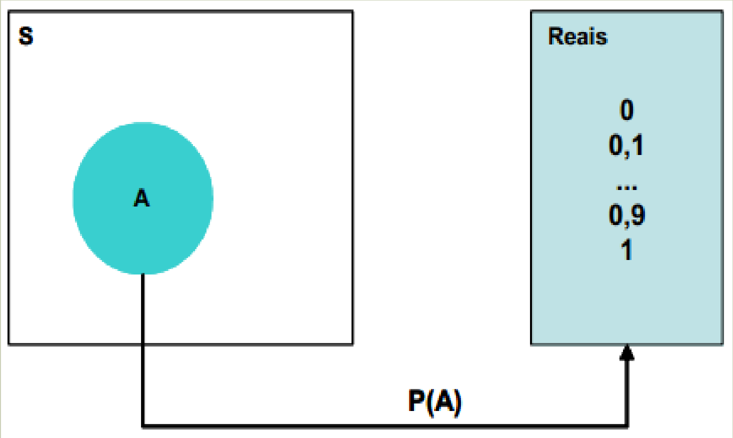
CONCEITO E DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

- **Conceito**: probabilidade é uma medida numérica da provável ocorrência de um evento.



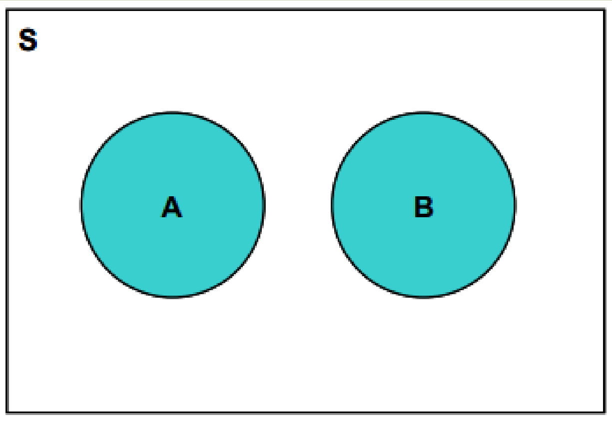
CONCEITO E DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

- **Definição:** dado um experimento aleatório E, e S seu espaço amostral, a probabilidade de um evento A, indicado por P(A), é uma função definida em S que associa a cada evento um número real, satisfazendo os seguintes axiomas:



CONCEITO E DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

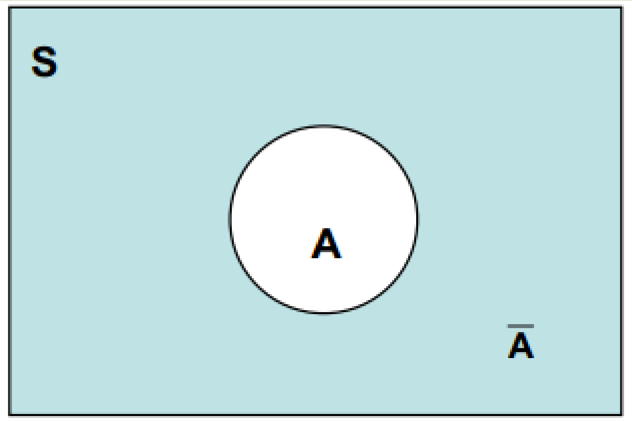
- Axiomas da probabilidade:
  - $P(S)=1$
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - Se A e B forem mutuamente exclusivos, $A \cap B = \Phi$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



Axioma: proposição geral que não tem demonstração, recebida e aceita por todos como verdadeira e evidente.

PRINCIPAIS TEOREMAS DA PROBABILIDADE

- Se Φ é um conjunto vazio, então P(Φ) = 0
- Se Ā é complemento do evento A, então:
  P(Ā) = 1 - P(A)

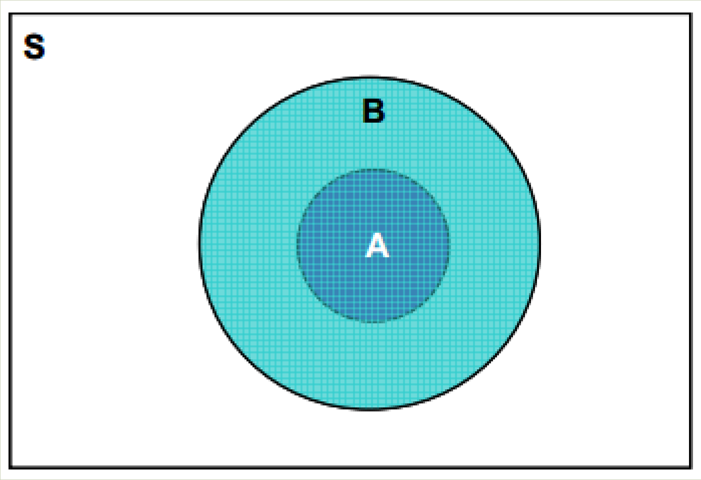


PRINCIPAIS TEOREMAS DA PROBABILIDADE

- Exemplo:
  - Dentro de um saco temo 3 limões e 7 laranjas
  - P(A): tirar um limão = 3/10
  - $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
  - $P(\bar{A}) = 1 - 3/10$
  - $P(\bar{A}) = (10 - 3)/10$
  - $P(\bar{A}) = 7/10$

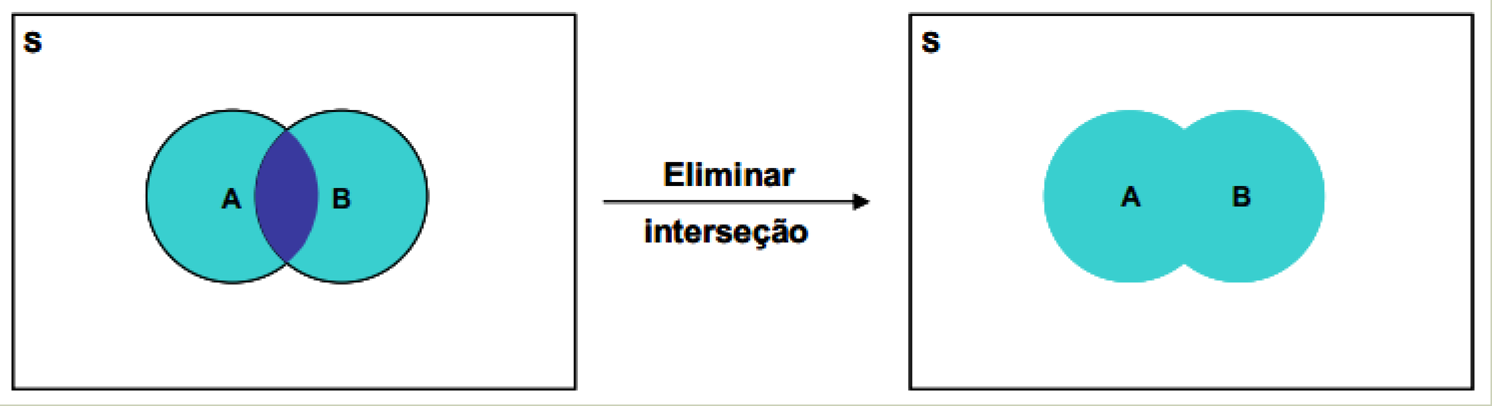
PRINCIPAIS TEOREMAS DA PROBABILIDADE

- Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$



PRINCIPAIS TEOREMAS DA PROBABILIDADE

- Se A e B são dois eventos quaisquer, então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



PROBABILIDADES FINITAS DOS ESPAÇOS AMOSTRAIS FINITOS

- Seja um espaço amostral finito S={a1, a2, ..., an}
- A cada evento simples ai associa-se um número pi denominado probabilidade de ai, $P(a_i)$ ou simplesmente pi, satisfazendo as seguintes condições:

- Pi ≥ 0 (i = $1, 2, 3, ..., n$) e P1 + P2 +...+Pn = 1

- A probabilidade P(A) de cada evento composto (mais de um elemento ou ponto amostral) é então definida pela soma das probabilidades dos pontos amostrais de A.

PROBABILIDADES FINITAS DOS ESPAÇOS AMOSTRAIS FINITOS

- Exemplo:
  - Três carros (A, B e C) estão em uma corrida; A tem 3 vezes mais chances de vencer que B; e B tem duas vezes mais chances de vencer que C.
  - Quais são as probabilidades de vitória de P(A), P(B) e P(C)?
  - Fazendo $P(C)=p$
  - $P(B)= 2p$
  - $P(A)= 6p$

$$2p+6p+p = 1 \therefore \; p = \frac{1}{9}$$

PROBABILIDADES FINITAS DOS ESPAÇOS AMOSTRAIS FINITOS

- Logo:
- $P(A) = \frac{6}{9}$
- $P(B) = \frac{2}{9}$
- $P(C) = \frac{1}{9}$
- Probabilidade de B ou C ganhar: $P(B \cup C) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$

ESPAÇOS AMOSTRAIS FINITOS EQUIPROVÁVEIS

- **Definição: Quando se associa cada ponto amostral a mesma probabilidade, o espaço amostral chama-se equiprovável ou uniforme.**
- **Em particular se S tem N pontos, então, a probabilidade de cada ponto será:**

$$\frac{1}{N}$$

- **Por outro lado de um evento A contém *n* pontos, então:**

$$P(A) = n*\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{n}{N}$$

ESPAÇOS AMOSTRAIS FINITOS EQUIPROVÁVEIS

- Este método de avaliar P(A) é enunciado da seguinte maneira:

$$P(A) = \frac{\text{número de vezes que o evento } (A) \text{ pode ocorrer}}{\text{número de vezes que o espaço amostral } (S) \text{ ocorre}}$$

- Ou:

$$P(A) = \frac{NCF \ (\text{número de casos favoráveis})}{NTC \ (\text{número total de casos})}$$

ESPAÇOS AMOSTRAIS FINITOS EQUIPROVÁVEIS

- Exemplo:
  - Escolher aleatoriamente(a expressão “aleatória” indica que o espaço amostral é equiprovável) um carta de um baralho de 52 cartas.
  - Evento A = {a carta é de ouros}
  - Evento B = {a carta é uma figura}
  - Calcular P(A) e P(B)

$$P(A) = \frac{\text{número de ouros}}{\text{número de cartas}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{\text{número de figuras}}{\text{número de cartas}} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

  - O cálculo da probabilidade de um evento se resume a um problema de contagem!

ESPAÇOS AMOSTRAIS FINITOS EQUIPROVÁVEIS

- A análise combinatória (teoria da contagem) tem fundamental importância para contar o número de casos favoráveis e o total de casos.
- A combinação de N elementos tomados (combinados) n a n, sendo n ≤ N, é calculado por:

$$C_n^N = \binom{\mathbf{N}}{\mathbf{n}} = \frac{N\,!}{n\,!(N-n)\,!}$$

ESPAÇOS AMOSTRAIS FINITOS EQUIPROVÁVEIS

- Exemplo: Em um lote de 12 peças, 4 são defeituosas, duas peças são retiradas aleatoriamente uma após a outra sem reposição. Temos:
- P(A) a probabilidade de ambas serem defeituosas:

$$A = C_2^4 = \binom{4}{2} = \frac{4\,!}{2\,!(4-2)\,!} = 6$$

$$S = C_2^{12} = \binom{12}{2} = \frac{12\,!}{2\,!(12-2)\,!} = 66$$

$$P(A) = \frac{NCF\ \ (\textit{número de casos favoráveis})}{NTC\ \ (\textit{número total de casos})} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

ESPAÇOS AMOSTRAIS FINITOS EQUIPROVÁVEIS

- P(B) probabilidade de ambas não serem defeituosas:

$$B = C_2^8 = \binom{8}{2} = \frac{8\,!}{2\,!(8-2)\,!} = 28$$

$$P(B) = \frac{NCF\ \ (\text{número de casos favoráveis})}{NTC\ \ (\text{número total de casos})} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$$

- P(C) probabilidade de pelo menos uma ser defeituosa:
- Observando que C é complemento de B, ou seja C = B

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- É de essencial importância calcular a probabilidade condicional.
- Seja E lançar um dado, e o evento A={3}. Então:

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

- Considere agora o evento B = {impar} = {1, 3, 5}
- Então devemos, avaliar o evento A condicionado ao evento B, ou ainda, a probabilidade de A dado B:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \text{ com } P(B) \neq 0, \text{ pois B já ocorreu}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- A seguinte fórmula é dada para o cálculo da probabilidade condicional:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{NCF(A \cap B)}{NTC}}{\frac{NCF(B)}{NTC}} = \frac{NCF(A \cap B)}{NCF(B)}$$

- Exemplo: Dois dado são lançados. Considere os eventos:

$$A = \{(x_1, x_2) / x_1 + x_2 = 10\}$$

$$B = \{(x_1, x_2) / x_1 > x_2\}$$

- Onde X1 é o resultado do dado 1 e X2 é o resultado do dado 2

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- Avaliar:
  - P(A)
  - P(B)
  - P(A/B)
  - P(B/A)

$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

$$A = [(x_1, x_2) / x_1 + x_2 = 10] = [(4,6);(6,4);(5,5)]$$

$$B = [(x_1, x_2) / x_1 > x_2] = \left\{ \begin{array}{l} (2,1); \\ (3,1);(3,2); \\ (4,1);(4,2);(4,3); \\ (5,1);(5,2);(5,3);(5,4); \\ (6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5) \end{array} \right\}$$

$$P(A) = \frac{NCF\,(A)}{NTC} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(B) = \frac{NCF\,(B)}{NTC} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

$$P(A/B) = \frac{NCF\,(A \cap B)}{NCF\,(B)} = \frac{1}{15}$$

$Obs:$ *notar que apenas o par* $(6,4)$ *é favorável ao evento* $(A \cap B)$

$$P(B/A) = \frac{NCF\,(A \cap B)}{NCF\,(A)} = \frac{1}{3}$$

TEOREMA DO PRODUTO

- A partir da definição de probabilidade condicional pode-se enunciar o teorema do produto:
- *"A probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos, A e B, do mesmo espaço amostral, é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicional do outro, dado o primeiro."*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

TEOREMA DO PRODUTO

- Exemplo: Num lote de 12 peças, 4 são defeituosas, duas peças são retiradas uma após a outra sem reposição. Qual a probabilidade de ambas não serem defeituosas ?
- A = {a primeira peça é boa}
- B = {a segunda peça é boa}

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{56}{132} = \frac{14}{33}$$

INDEPENDÊNCIA ESTATÍSTICA

- Definição: um evento A é dito independente de um evento B, se a probabilidade de A ocorrer não é influenciada pelo fato de B ter ocorrido ou não.
- Em outras palavras se a probabilidade de A é igual à probabilidade condicional de A dado B, isto é, se:

$$P(A) = P(A/B)$$

- Em consequência, se A é independente de B, B é independente de A, assim:

$$P(B) = P(B/A)$$

- Considerando o teorema do produto, pode-se afirmar que se A e B são independentes, então:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- A equação acima é usada como definição formal de independência.

INDEPENDÊNCIA ESTATÍSTICA

- Dados n elementos A1, A2, ..., An, diz-se que eles são independentes se o forem 2 a 2, 3 a 3, n a n.
- Isto é, se as igualdades abaixo forem verificadas:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$P(A_{n-1} \cap A_n) = P(A_{n-1}) \cdot P(A_n)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_{n-1}) \cdot P(A_n)$$

INDEPENDÊNCIA ESTATÍSTICA

- Exemplo A:
  - Num lote de 10 peças, 4 são defeituosas, duas peças são retiradas uma após a outra com reposição. Qual a probabilidade de que ambas sejam boas?
  - A = {a primeira peça é boa}
  - B = {a segunda peça é boa}
  - Notando que A e B são independentes, pois P(B)= P(B/A)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{25}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Faria, José Cláudio – CET18_10ed_1pf.
- Correa, Sonia Maria Barros Barbosa – Probabilidade e Estatística, 2º Edição.